ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integro-differenziali.* Nota I di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Abbiasi la seguente equazione integro-differenziale:

$$u(s\,,t) = h(s\,,t) + \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(s\,,r) \frac{\partial^p}{\partial t^p} h(r\,,t)\, dr\,, \tag{1}$$

dove $u(s\,,t)$ è una funzione nota, $h(s\,,t)$ la funzione incognita e p un numero finito intero e positivo.

Supporremo che $\mathrm{K}(s\,,t)$ sia una funzione simmetrica delle due variabili s e t, entro il rettangolo $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$, e soddisfacente in esso alle condizioni dello Schmidt [1]; che tanto la $u(s\,,t)$ quanto le sue prime $2p$ derivate parziali rispetto a t siano finite e continue per $0 \leqq s \leqq 1$ e $t \geqq t_0$, essendo t_0 una costante qualunque; ed infine che esistano le prime $4p-2$ derivate parziali della $u(st)$ rispetto a t. Ci proponiamo di dare una formula risolutiva per l'equazione (1) [2].

2. Se si pone

$$g(s\,,t) = u(s\,,t) - h(s\,,t)\,, \tag{2}$$

la (1) diventa

$$g(s\,,t) = \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(s\,,r) \left[\frac{\partial^p u(r\,,t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p g(r\,,t)}{\partial t^p} \right] dr\,; \tag{3}$$

e poichè quest'equazione deve ammettere soluzione, nell'ipotesi che la (1) ne ammetta, dovrà necessariamente essere [3]

$$g(s\,,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{G}^{(\nu)}(s\,,t)\,, \tag{4}$$

per ogni valore di $t \geqq t_0$.

Se inoltre indichiamo con $\mathrm{H}^{(\nu)}(s\,,t)$ la funzione caratteristica della $\mathrm{K}(s\,,t)$ relativa alla costante Γ_ν [4], la quale, com'è noto, è una funzione finita con-

(1) *Entwicklung willkürlicher functionen* etc., Inaugural-Dissert., Göttingen, 1905.

(2) Di questo tipo di equazioni se n'è già occupato l'Amoroso. Egli però si è limitato al caso $p=1$ (questi Rendiconti, 1912; due Note) e $p=2$ (Atti della Società italiana pel progresso delle scienze, 6ª riunione, 1912, pag. 743). Qui invece intendiamo trattare il caso generale per p qualunque, purchè intero e positivo, e sotto condizioni alquanto più larghe per la $\mathrm{K}(s\,,t)$.

(3) A. Vergerio, *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLI, 1916; Cap. II, § 3, Teor. V).

(4) A. Vergerio, loc. cit., Cap. II, §§ 1 e 2.

tinua positiva e non identicamente nulla, ed integriamo ambo i membri della (3) tra i limiti 0 ed 1, dopo averli moltiplicati per $H^{(\nu)}(s,t)$, otterremo:

$$G^{(\nu)}(s,t) = \lambda \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r) \left[\frac{\partial^p u(r,t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p g(r,t)}{\partial t^p} \right] dr =$$

$$= \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r) \left[u(r,t) - g(r,t) \right] dr ;$$

la quale equazione può anche scriversi

$$(5) \qquad G^{(\nu)}(s,t) = \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t) - \lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} G_1^{(\nu)}(s,t),$$

quando si ponga

$$\int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\, u(r,t)\, dr = U_1^{(\nu)}(s,t) \; ; \; \int_0^1 H_1^{(\nu)}(s,r)\, g(r,t)\, dr = G_1^{(\nu)}(s,t).$$

Si moltiplichino ambo i membri della (5) per $H_1^{(\nu)}(st)$ e si integri tra 0 ed 1; si otterrà [1]:

$$\lambda G_1^{(\nu)}(s,t) = \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^p}{\partial t^p} U^{(\nu)}(s,t) - \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^p}{\partial t^p} G^{(\nu)}(s,t);$$

da cui, derivando p volte rispetto a t,

$$\lambda \frac{\partial^p}{\partial t^p} G_1^{(\nu)}(s,t) = \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \lambda^2 \Gamma_\nu \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} G^{(\nu)}(s,t).$$

Sottraendo quest'eguaglianza dalla (5), membro a membro, si ottiene la seguente equazione differenziale lineare con secondo membro, cui deve soddisfare la funzione incognita $G^{(\nu)}(s,t)$:

$$(6) \qquad \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} G^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda^2 \Gamma_\nu} G^{(\nu)}(s,t) = \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda \Gamma_\nu} \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t).$$

3. Posto per brevità

$$\frac{1}{\sqrt[2p]{\lambda^2 \Gamma_\nu}} = \gamma_\nu \; ; \; \cos \frac{2n\pi}{2p} + i \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{2p} = \alpha_n \; ;$$

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} U^{(\nu)}(s,t) - \frac{1}{\lambda \Gamma_\nu} \frac{\partial^p}{\partial t^p} U_1^{(\nu)}(s,t) = M_\nu(s,t),$$

l'integrale generale della (6) è dato dall'eguaglianza [2]:

$$G^{(\nu)}(s,t) = \sum_{n=0}^{2p-1} \left\{ C_n^{(\nu)}(s)\, e^{\alpha_n \gamma_\nu} + \frac{1}{2p\, \gamma_\nu^{2p-1}} \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\alpha_n \gamma_\nu (t-r)}}{\alpha_n^{2p-1}} M_\nu(s,r)\, dr \right\}$$

(1) Si ricordi che $\int_0^1 H_1^{(\nu)}(sr)\, H_1^{(\nu)}(rt)\, dr = \Gamma_\nu H^{(\nu)}(st)$ e che la $H_1^{(\nu)}(s,t)$ è una funzione continua; è lecita perciò l'inversione dei segni d'integrale e di derivata.

(2) De La Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. II, 2ª ed., Paris, Gauthier-Villars, pag. 246.

dove le $C_n^{(\nu)}(s)$ sono delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione, le quali, in grazia della (2), potranno essere determinate, in modo unico, quando si conoscano i valori assunti dalla funzione incognita $h(s,t)$ e dalle sue prime $2p-1$ derivate parziali rispetto a t, per $t=t_0$.

Per le (2) e (4) avremo così la formula risolutiva:

$$(7) \qquad h(s,t)=u(s,t)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{2p-1}\left\{c_{n,0}^{(\nu)}(s)\,e^{\alpha_n\gamma_\nu t}+\frac{1}{2p\,\gamma_\nu^{2p-1}\,\alpha_n^{2p-1}}\int_{t_0}^{t}e^{\alpha_n\gamma_\nu(t-r)}\,M_\nu(s,r)\,dr\right\};$$

dove le $c_{n,0}^{(\nu)}(s)$ sono le funzioni $c^{(\nu)}(s)$ precedentemente determinate nel modo suesposto.

Possiamo pertanto concludere che *se l'equazione* (1) *ammette come soluzione una funzione* $h(s,t)$ *finita e continua assieme alle sue prime* $2p$ *derivate parziali rispetto a* t *per* $0\leq s\leq 1$ *e* $t\geq t_0$, *tale da assumere essa e le sue prime* $2p-1$ *derivate parziali rispetto a* t *dei valori prefissati per* $t=t_0$, *detta soluzione sarà data dalla* (7); *e sarà inoltre unica.*

4. La (7) assume una forma molto più semplice nel caso in cui le costanti della $K(s,t)$ siano tutte eguali tra loro.

Si sa infatti [1] che allora che le funzioni caratteristiche $U^{(\nu)}(s,t)$ ed $U_1^{(\nu)}(s,t)$ sono identicamente nulle per ogni $\nu>1$, tali essendo le $H^{(\nu)}(s,t)$ ed $H_1^{(\nu)}(s,t)$; mentre invece per $\nu=1$ si ha

$$U_1^{(1)}(s,t)=u_1(s,t)\quad,\quad U^{(1)}(s,t)=\frac{u_2(s,t)}{\Gamma_1};$$

dove

$$u_1(s,t)=\int_0^1 K(s,r)\,u(r,t)\,dr\quad;\quad u_2(s,t)=\int_0^1 K_2(s,r)\,u(r,t)\,dr\,.$$

Con ciò la (7) diviene

$$h(s,t)=u(s,t)+$$
$$+\sum_{n=0}^{2p-1}\left\{c_{n,0}(s)\,e^{\gamma_1\alpha_n t}+\frac{1}{2p\gamma_1\,\alpha_n^{2p-1}}\int_{t_0}^{t}e^{\gamma_1\alpha_n(t-r)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{u_2(s,r)}{\Gamma_1}-\frac{1}{\lambda\Gamma_1}\,\frac{\partial^p}{\partial t^p}\,u_1(s,r)\right]dr\right\}.$$

In un'altra Nota daremo un'altra formula risolutiva sotto condizioni più generali per la $K(s\,t)$.

[1] Cfr. la mia Memoria citata, Cap. IV, § 2: caso particolare.

Chimica. — *Nuova sostanza esplosiva derivata dalla formaldeide* (¹). Nota del dott. ANNIBALE MORESCHI, presentata dal Socio R. NASINI.

Se si fa agire l'acido cloridrico gassoso sopra una soluzione di aldeide formica del commercio (40 %, circa) a lungo a ricadere e raffreddando, si ha assorbimento di acido cloridrico che si addiziona al corpo aldeidico secondo:

$$\begin{matrix} H_2 \\ | \\ C = O \end{matrix} + HCl = \begin{matrix} CH^2 - OH \\ | \\ Cl. \end{matrix}$$

si giunge cioè ad una sostanza contenente 53,38 % di cloro; all'analisi le determinazioni fatte dànno oscillazioni da 54 a 56 %. Se si protrae l'azione dell'acido cloridrico, si osserva un assorbimento continuo del gas e si ha la separazione di uno strato liquido pesante che deve risultare dall'azione eterificante dell'acido cloridrico sull'alcool clorurato:

$$\begin{matrix} CH^2 - OH \\ Cl \\ Cl \\ CH_2 - O\,H \end{matrix} + HCl = H_2O + HCl + \begin{matrix} CH^2Cl \\ | \\ O \\ | \\ CH^2Cl \end{matrix}$$

Il prodotto dovrebbe contenere 61,73 % di cloro; ne contiene all'analisi da 62 a 65 % e sembra che il maggior contenuto si spieghi con la presenza di acido cloridrico libero e disciolto.

Si è rivolta l'attenzione a questo corpo allo scopo di preparare il glicol etilenico.

Riservandomi di riferire sui prodotti di condensazione che si ottengono disalogenando il composto, espongo qui il risultato del suo comportamento all'azione del miscuglio nitrante comunemente adoperato per la trasformazione della glicerina in nitroglicerina.

Se si fanno pervenire lentamente, raffreddando a circa 5°C, il miscuglio tenuto in viva agitazione, 20 gr. del composto alogenato in 170 gr. di miscuglio della composizione seguente:

SO_4H_2	53.90
NO_3H	43.43
H_2O	2.67

(t) Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico della Fabbrica di esplosivi Bombrini, Parodi-Delfino, in Segni-Scalo.

avendo cura di proseguire l'agitazione, per un tempo pressochè eguale a quello impiegato per lasciar defluire il composto alogenato, sospendendo l'agitazione si ha separazione nello spazio di pochi minuti di un prodotto oleoso che galleggia sul miscuglio ed è pressochè incolore. Durante l'operazione si ha sviluppo di un gas pungente, contenente fosgene, acido cloridrico e probabilmente un acido ossigenato del cloro.

Separato il prodotto dal miscuglio, si raccoglie in acqua fredda dove precipita al fondo; si lava finchè nell'acqua di lavaggio non si riconosce più acido solforico; da 20 gr. di prodotto alogenato si hanno rendimenti, da numerose prove, di 23-24 gr. di prodotto nitrato, esente da alogeno.

Il prodotto è estremamente sensibile all'urto: si decompone con detonazione.

Seccato sopra solfato di sodio anidro, il suo peso specifico è d.^{t} 4° C = = 1.52206.

La determinazione dell'azoto al nitrometro, eseguita ripetutamente, porta a numeri che oscillano da 8,90 a 9 °/₀.

La determinazione eseguita pure parecchie volte secondo Dumas sopra sostanza di diverse preparazioni, dà numeri che oscillano dal 18 al 18,20 °/₀.

Ripetute combustioni per carbonio ed idrogeno, con ossido di rame (ripetute per la difficoltà di guidare la combustione) portano ai numeri seguenti:

C °/₀ = 14,60
H » = 2,40

La determinazione della grandezza molecolare secondo il metodo crioscopico, solvente il benzolo ha dato:

$$P.M. = \frac{100\,pT}{l.\,c} \qquad T = 51$$

Per solvente	Sostanza sciolta	Δ	P.M.
Gr. 20.646	—	—	—
	0.3470	0°,59	145
	0.8031	1°,38	143
	1.0905	1°,87	144
Gr. 16.780	0.4210	0°,86	149

Complessivamente si possono riassumere i seguenti dati analitici:

Sostanza	gr. 0.1827	
CO_2	» 0.0999	C °/₀ = 14.90
H_2O	» 0.0395	H » = 2.40
C	» 0.02724	N » = 18,11
H	» 0.00439	O » = 64,49

dai quali il composto risulterebbe $C_2H_4O_6N_2$ (peso molecolare 152) che contiene teoricamente:

C % = 15.78
H " = 2.63
N " = 18.42
O " = 63.17

Grammi 3.6 di prodotto si saponificano scaldandoli a ricadere con 25 cc. di una soluzione di potassa caustica al 15 %; si impiegano complessivamente grammi 2.53 di KOH; dalla teoria per due gruppi acidi NO_2 sono richiesti grammi 2.65.

Come è detto più sopra, il composto si può esprimere con $C_2H_4N_2O_6$, risponde cioè per composizione centesimale e per grandezza molecolare al dinitroglicol; ma sono peraltro ben diverse le proprietà fisiche e chimiche di quel prodotto. Il modo di formazione, il rendimento, il comportamento differente dei gruppi azotati delle due espressioni seguenti:

fanno ritenere più probabile la seconda: rende improbabile la prima il fatto che la saponificazione porta ad acido formico e nitrometano.

La sostanza, forse per il suo spiccato carattere di etere ha un grandissimo potere solvente verso il nitrocotone, tantochè lo scioglie in misura elevata anche alla temperatura di 0° C.

Si è preparato dal prodotto una gelatina esplosiva contenente 7 % di nitrocotone (N = 12.11 %), gelatina che è stata provata al Traultze in parallelo con gelatina allo stesso titolo di nitroglicerina; si è avuto:

Gr. 10 gelatina alla nitroglicerina		Gr. 10 gelatina X
Vol. iniz	Vol. dopo esplos.	Vol. dopo esplosione
60 cc.	41[illegible] cc.	545 cc.
	435	560
	420	540

Il comportamento dell'aldeide formica descritto nella presente Nota ha suggerito di proseguire le indagini su altri corpi a funzione aldeidica, allo scopo di stabilire se l'introduzione del gruppo nitrico avviene con la stessa regolarità; è stata presa in considerazione l'aldeide acetica e si è osservato che se si conduce l'addizione di acido cloridrico lentamente ed a bassa temperatura, il prodotto alogenato che ne deriva è esso pure suscettibile di

sostituzione nel gruppo alogenico con un gruppo nitrico per l'azione del miscuglio nitrante.

Dalle determinazioni dell'acido nitrico nel miscuglio riguadagnato appare che la quantità rimasta è di poco inferiore a quella teorica, quando si dosi appena sia avvenuta la separazione; va invece diminuendo gradatamente con l'elevarsi della temperatura, probabilmente in seguito ad ossidazione più spinta dell'acido cloridrico. Le osservazioni esposte possono essere ragioni determinanti dello studio del fenomeno di sostituzione del gruppo alogenico col nitrogruppo.

Ritengo doveroso osservare che la nitrazione deve essere condotta nelle condizioni sopra esposte, perchè variando il rapporto tra sostanza da nitrare e miscuglio nitrante, allo scopo di avere un acido riguadagnato più povero in acido nitrico, si va contro una sicura esplosione a nitrazione compiuta.

Fisica. — *Oscillazioni luminose nelle nuove lampade ad incandescenza* [1]. Nota di Luigina Fabaro, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Era già noto che, alimentando una lampada ad incandescenza con correnti alternate, la luce emessa è lievemente pulsante a causa del carattere oscillatorio dell'energia che il filamento riceve e della non grandissima inerzia calorifica del filamento medesimo.

Il problema fu sottoposto a lunga indagine teorica e sperimentale dal prof. Corbino, il quale mise in evidenza le particolarità più caratteristiche del fenomeno, dimostrando che la temperatura del filamento oscilla di una quantità determinata intorno ad un valore medio, cui corrisponde la luminosità media, e tali oscillazioni hanno ampiezza e fase dipendenti in modo semplice dalla capacità termica del filamento, dalla energia media emessa e dalla sua derivata rispetto alla temperatura. In seguito a quelle ricerche, e misurando sperimentalmente le variazioni periodiche di resistenza del filamento, si potè dedurre il calore specifico del metallo alla temperatura elevatissima del funzionamento normale della lampadina.

Furono in seguito fatte da altri misure fotometriche opportunamente dirette alla valutazione delle oscillazioni di intensità luminosa delle lampadine alimentate da correnti alternate. Si potè così stabilire che alla frequenza di 50 periodi una lampada media a filamento metallico varia di circa il 15 % nella sua intensità luminosa misurata in fasi diverse della corrente.

Nelle lampade dette *mezzo-watt*, caratterizzate da una temperatura più alta di regime del filamento e dalla presenza di un gas inerte destinato ad

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.