ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 27 aprile 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integro-differenziali.* Nota II di Attilio Vergerio, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

1. Riprendiamo l'equazione integro-differenziale

$$u(s,t) = h(s,t) + \lambda \int_0^1 K(s,r) \frac{\partial^p}{\partial t^p} h(r,t)\, dr \tag{1}$$

e lasciamo cadere l'ipotesi, posta nella Nota precedente, che la funzione $K(s,t)$ sia simmetrica, ponendo invece per essa la sola condizione di essere limitata e continua per egni $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$.

Ammettiamo inoltre che tanto la $u(s,t)$ quanto le sue derivate parziali rispetto a t di tutti gli ordini siano continue entro il suddetto rettangolo; e che si abbia, qualunque sia n,

$$\left| \frac{\partial^n u(s,t)}{\partial t^n} \right| < m ;$$

essendo m un numero finito e positivo.

Si verifica con facilità che la serie

$$u(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n^{(np)}(s,t) \quad \left(u_n^{(np)}(s,t) = \int_0^1 K_n(s,r) \frac{\partial^{np}}{\partial t^{np}} u(r,t)\, dr \right)$$

soddisfa *formalmente* la (1); essa però non potrà essere una *soluzione effettiva* se non nel caso in cui sia convergente ed integrabile termine a ter-

mine; ovvero quando le derivate parziali della $u(s,t)$ rispetto a t, da un indice finito in poi, siano tutte nulle; la serie riducendosi allora alla somma d'un numero finito di termini.

Vogliamo qui dimostrare che ai due casi suaccennati se ne può aggiungere un terzo; quello, cioè, in cui la (8) sia *sommabile* col metodo del Borel. La dimostrazione è affatto simile a quella che abbiamo dato [1] per una questione analoga riguardante le equazioni integrali di seconda specie di Fredholm; ci limiteremo perciò a dimostrare il teorema per sommi capi, rimandando il lettore, per maggiori dilucidazioni, alla mia Nota citata.

2. Diremo che una serie di funzioni $v_n(s,t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, continue nel rettangolo $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$, è *sommabile* quando

1°) la serie

$$S(s,t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(s,t)\frac{x^n}{n!} \qquad (\sigma_n(s,t) = v_0(s,t) + \cdots + v_n(s,t))$$

è convergente per ogni $x \geqq 0$ finito, qualunque sia il punto (s,t) entro il suo campo di variabilità;

2°) l'espressione $e^{-x}S(s,t,x)$ tende per $x \longrightarrow \infty$ ad un limite finito e determinato $S(s,t)$.

Ricorderemo poi il seguente lemma: *se* $f(s,t,x)$ *è una funzione continua assieme alla* $\dfrac{\partial}{\partial x} f(s,t,x)$ *per ogni* $x \geqq 0$ *in ogni punto* (s,t) *del rettangolo suddetto, e se l'integrale improprio*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\partial}{\partial x} f(s,t,x)\,dx$$

converge, è pure convergente l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(s,t,x)\,dx\,;$$

si ha inoltre

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} f(s,t,x) = 0\,,$$

qualunque sia il punto (s,t) *nel rettangolo accennato.*

3. Dimostriamo anzitutto che la serie $S(s,t,x)$ è sempre convergente, per ogni $x \geqq 0$ finito, in modo assoluto ed indipendentemente dal punto (s,t).

[1] *Un'applicazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta del 15 aprile 1917).

Se M è un numero finito e positivo si ha, infatti:

$$|K(s,t)| < M,$$

$$|K_2(s,t) \leqq \int_0^1 |K(s,r)|\,|K(r,t)|\,dr < M^2;$$

ed in generale

$$|K_n(s,t)| < M^n;$$

per cui

$$|u_n^{(np)}(s,t)| \leqq \int_0^1 |K_n(s,r)| \left|\frac{\partial^{np}}{\partial t^{np}} u(r,t)\right| dr < M^n m.$$

Posto $|\lambda| M = \varrho$, segue

$$|\sigma_n(s,t)| \leqq \sum_{r=0}^{n} |\lambda|^r |u_r^{(rp)}(s,t)| < m \sum_{r=0}^{n} \varrho^r = m \frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho};$$

e quindi

$$\left|\sum_{r=n}^{\infty} \sigma_r(s,t) \frac{x^r}{r!}\right| \leqq \sum_{r=n}^{\infty} |\sigma_n(s,t)| \frac{x^r}{r!} < \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{\infty} (1-\varrho^{n+1}) \frac{x^r}{r!} =$$

$$= \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - \frac{m\varrho}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(\varrho x)^r}{r!};$$

da cui risulta che per la serie $S(s,t,x)$ è sempre soddisfatta la prima condizione.

Nello stesso modo si vedrebbe che la serie *associata*

$$v(s,t,x) = u_0(s,t) -$$

$$- \lambda u_1^{(p)}(s,t)\, x + \lambda^2 u_2^{(2p)}(s,t) \frac{x^2}{2!} - \lambda^3 u_3^{(3p)}(s,t) \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (1)$$

converge anch'essa, in modo assoluto ed uniforme, rispetto ad s e t, per ogni x finito e positivo e che inoltre è pure convergente uniformemente ed assolutamente la serie $\frac{\partial}{\partial x} v(s,t,x)$ ottenuta derivando, rispetto ad x, la precedente, termine a termine.

(1) È quasi superfluo osservare che $u_0(s,t) = u(s\,t)$.

4. Si sostituisca nel secondo membro della (1) ad $h(s,t)$ l'espressione $e^{-x}\,S(s,t,x)$ e si osservi che

$$\lambda\int_0^1 K(s,r)\,\frac{\partial^p}{\partial t^p}\,\sigma_n(r,t)\,dr = \lambda\,\frac{\partial^p}{\partial t^p}\int_0^1 K(s,r)\,\sigma_n(r,t)\,dr =$$

$$= \frac{\partial^p}{\partial t^p}\left[\lambda\,u_1(s,t) - \lambda^2\,u_2^{(p)}(s,t) + \cdots + (-1)^n\,\lambda^n\,u_{n+1}^{(np)}(s,t)\right] =$$

$$= \lambda\,u_1^{(p)}(s,t) - \lambda^2\,u_2^{(2p)}(s,t) + \lambda^3\,u_3^{(3p)}(s,t) - \cdots + (-1)^n\,\lambda^n\,u_{n+1}^{(n+1)p}(s,t) =$$

$$= -\sigma_{n+1}(s,t) + \sigma_0(s,t)\,.$$

Avremo:

$$e^{-x}\,S(s,t,x) - \lambda\int_0^1 K(s,r)\,\frac{\partial^p}{\partial t^p}\,e^{-x}\,S(r,t,x)\,dr = u_0(s,t) - e^{-x}\,v'(s,t,x),$$

dove $v'(s,t,x)$ indica la derivata parziale rispetto ad x della $v(s,t,x)$.

Supposto ora che l'espressione $e^{-x}\,\dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\,S(s,t,x)$ converga per $x \longrightarrow \infty$ *uniformemente* al suo limite $S(s,t)$, potremo invertire il segno di limite con quello d'integrale; e poichè esiste finito e determinato il limite del 1° membro, esisterà tale anche quello del 2°; e quindi anche il limite di $e^{-x}\,v'(s,t,x)$.

Ragionando come nella mia Nota citata e ricordando il teorema del § 2, si dimostrerebbe con facilità che dev'essere

$$\lim_{x=\infty} e^{-x}\,v'(s,t,x) = 0\,;$$

e che quindi $\lim\limits_{x=\infty} e^{-x}\,S(s,t,x)$ è veramente una soluzione della (1), alla quale può darsi anche la forma

$$S(s,t) = \int_0^\infty e^{-x}\,v(s,t,x)\,dx\,.$$