ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme.* Nota II di B. CALDONAZZO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

4. Nella Nota precedente la corrente C era fatta intervenire in modo puramente fittizio.

Si supponga ora che il moto del velo liquido sia composto oltre che del moto provocato dal vortice anche di quello dovuto alla corrente C stessa. Si ottiene così una corrente con un vortice puntiforme. La velocità di questo è la somma della velocità che esso avrebbe in assenza della corrente C e della velocità che compete alla corrente stessa nel punto occupato dal vortice. La prima parte è fornita dalla (4'), la seconda è **V**. Indicando ancora con $\mathbf{V}^*$ la velocità risultante dal vortice si ha

$$\mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{\psi} + \frac{2\pi}{I}\right)\mathbf{V} - \operatorname{grad}\vartheta\right\},$$

oppure, in forma complessa, secondo la (4),

$$w^* = \frac{I}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{\psi} + \frac{2\pi}{I}\right)w - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\log w}{\mathrm{d}z}\right\}.$$

Scomponendo $\mathbf{V}^*$ nei suoi componenti parallelo e normale a **V**, secondo la (8) si ottiene

$$\mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{\psi} + \frac{2\pi}{I}\right)\mathrm{V} - \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right\}\mathbf{t} + \frac{I}{2\pi}\frac{\partial\tau}{\partial s}\mathbf{n}.$$

Sono punti d'arresto del vortice quelli in cui

$$\left(\frac{1}{\psi} + \frac{2\pi}{I}\right)\mathrm{V} = \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\quad,\quad \frac{\partial\tau}{\partial s} = 0.$$

La seconda di queste coincide colla relazione già trovata per il caso in cui mancava la corrente C. Questa relazione individua una linea l, cui fa parte il luogo dei punti dove la velocità V di un elemento di C ha un massimo o un minimo e sulla quale necessariamente si trovano gli eventuali punti d'arresto del vortice.

Per la *stabilità* dell'arresto vale ancora la relazione già trovata

$$I\frac{\partial^2\vartheta}{\partial s^2} > 0.$$

La funzione di corrente relativa a V^*, fornita dalla (3), si modifica nel caso attuale nella seguente:

$$\psi^* = \frac{I}{2\pi} \log \frac{\psi}{V} + \psi ;$$

sono quindi traiettorie del vortice le linee

$$V = a\psi e^{\frac{2\pi}{I}\psi}, \qquad a = \text{cost} \ (^1).$$

Negli eventuali punti angolari della parete in cui $V = 0$, la precedente non è soddisfatta per qualunque valore di a, come potrebbe sembrare a prima vista pel fatto che sulla parete è $\psi = 0$, perchè in detti punti V si annulla di ordine inferiore a ψ (²).

5. Se la parete ha dei punti angolosi, questi appartengono alla linea l definita sopra, perchè in essi la V assume o il valore minimo zero o il valore massimo infinito. Si constata inoltre che non sono punti isolati di tale linea. Basta notare che, per il comportamento di V in un intorno di un punto angoloso (²), sulle porzioni di linee di flusso di C appartenenti ad un tale intorno V ha certamente un massimo o un minimo.

La circostanza ora rilevata mette in evidenza la possibilità di un arresto in prossimità dei punti angolosi della parete. Ciò concorda con quanto si osserva nel caso reale, che più s'accosta al problema schematico ora studiato, e che è offerto da un fiume o canale sufficientemente largo perchè in prossimità di una sponda non sia sensibile l'influenza dell'altra sponda e quando il moto avviene sensibilmente per piani paralleli. Si osserva allora che i vortici ad asse verticale si presentano di preferenza, sostandovi, in prossimità delle sporgenze e delle rientranze delle sponde.

6. Quale applicazione considero la linea l in due casi particolari; sono costretto tuttavia, per la ristrettezza di spazio concesso, ad accennare soltanto ad alcuni risultati. Dato l'interesse di questi in riguardo al fenomeno realmente osservato, mi propongo di trattarli in seguito più diffusamente.

(¹) Poichè il secondo membro della (4') resta inalterato cambiando V in $-V$, invertendo cioè la corrente C, inquantochè anche ψ muta segno e grad ϑ non cambia, si può senz'altro togliere la restrizione che ψ non possa assumere valori negativi. Quindi la costante a può essere anche minore di zero.

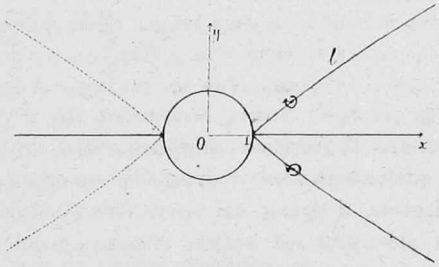
(²) Sia $n\pi$, ($|n| \leq 1$) il salto di ϑ attraverso un punto angoloso P, nel senso di V ed $f(P)$ la f valutata in P. La V, come si potrebbe dimostrare, in un intorno di P si comporta come $|f - f(P)|^n$. Per $0 < n < 1$ (la parete presenta una *rientranza* al campo del moto) V si annulla quindi di ordine $n < 1$ rispetto a ψ, come si è asserito. Vanno però esclusi da tali considerazioni gli eventuali punti di regresso in cui $n = 1$.

Si noti che per $n < 0$ (la parete offre un *saliente* alla corrente) V diventa infinita di ordine $-n$ rispetto ad $1 : \psi$.

Sia $f = z + z^{-1}$, con $r = |z| \geq 1$ ed $y \geq 0$. Risulterà così

$$\psi = y\,(1 - r^{-2}).$$

La parete $\psi = 0$ consta dell'asse $y = 0$, escluso il tratto $|x| \leq 1$, invece del quale si ha la semicirconferenza $r = 1$, $y \geq 0$. La corrente C ha la velocità $w = 1 - z^{-2}$, che all'infinito diventa eguale ad 1. La linea l è costituita dalla semiretta $x = 0$, $y \geq 1$ e dalla curva del quarto ordine $2y = r - r^{-1}$, cui, a conferma di quanto è stato rilevato sopra pel caso generale, appartengono i punti angolari della parete $x = \pm 1$, $y = 0$. Questa curva è formata di due rami simmetrici all'asse $x = 0$; nella figura ho indicato con linea a tratti il ramo a monte, con linea continua il ramo a valle dell'origine.



La semiretta $x = 0$, $y \geq 1$ è luogo dei punti di arresto pei vortici d'intensità positiva e l'arresto è *instabile*. La curva è luogo dei punti di arresto pei vortici d'intensità negativa; *sul ramo a valle dell'origine l'arresto è stabile, su quello a monte è instabile.*

Con una riflessione del campo del moto sull'asse $y = 0$ si ottiene il moto di una coppia di vortici in una corrente indefinita che investe un disco circolare (vedi figura). Se i vortici sono fissi, imprimendo a tutto il liquido ed al disco la traslazione $w = 1$, si ha il moto di un disco in un liquido in quiete all'infinito, in presenza di una coppia di vortici concomitanti col disco, a guisa di scia.

Notevole il risultato, che concorda con quanto si osserva nel caso reale, che *la coppia di vortici può sussistere stabilmente soltanto a valle del disco*. Si potrebbe ancora dimostrare che *aumentando la velocità del disco, i vortici tendono portarsi sempre più sotto poppa al disco.*

A risultati qualitativi eguali si giunge nel caso di una lamina che si sposta normalmente a se stessa. Assumendo eguale a due la sua lunghezza e ad uno la sua velocità, si ha $f^2 = 1 + z^2$. La linea l consta della semiretta $x = 0$, $y \geq 1$ e della curva $\varphi^2 = 3\psi^2 + 1$, il cui comportamento è simile a quello della corrispondente curva nel caso del disco.