ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Meccanica. — *Traiettorie dinamiche dei sistemi olonomi con tre gradi di libertà.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Birckhoff in un suo pregevole lavoro ([1]) sui sistemi olonomi con due gradi di libertà, ha assegnato un teorema molto espressivo per le traiettorie dinamiche di tali sistemi, nel caso in cui la corrispondente funzione lagrangiana contenga anche termini lineari nelle componenti della velocità (pur essendo esplicitamente indipendente dal tempo). Il problema in tal caso si suol chiamare *irreversibile*.

La conoscenza di questo teorema mi ha spinto a ricercarne uno analogo per i sistemi olonomi con tre gradi di libertà, sempre nell'ipotesi della irreversibilità del moto. In questa Nota mi propongo di comunicare il risultato al quale sono giunto.

Nel n. 1 assegno l'equazione comprensiva delle traiettorie per i moti in questione. A questa equazione vi giungo nel modo più semplice mercè un criterio molto elegante, assegnato dal Levi Civita ([2]), che serve per passare — nell'ordinaria meccanica dei sistemi olonomi, mobili sotto l'azione di forze conservative — dal principio di Hamilton a quello della minima azione.

Nel n. 2 passo all'interpretazione dinamica di questo principio.

1. IL PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE PER I SISTEMI DINAMICI CON TRE GRADI DI LIBERTÀ. — Sia S un sistema dinamico con tre gradi di libertà; q_1, q_2, q_3 denotino le coordinate di un suo punto qualunque e t il tempo. Le equazioni del moto, indicando con L la funzione lagrangiana del sistema, si compendiano notoriamente nel principio variazionale

$$\delta \int \mathrm{L}\, dt = 0 . \tag{1}$$

L è una funzione quadratica nelle derivate $\dot{q}$ delle q rispetto al tempo. Noi supporremo che L contenga anche termini lineari nelle $\dot{q}$, ossia che i legami a cui sono sottoposti i punti del sistema dipendano anche dal tempo, come quando, ad es., si riferiscono ad assi uniformemente ruotanti. L sia quindi della forma

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s + \sum_{1}^{3}{}_{r}\, b_r\, \dot{q}_r + c , \quad (a_{rs} = a_{sr}) . \tag{2}$$

([1]) G. Birckhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. XVIII, n. 2, 1917, pp. 199-300].

([2]) T. Levi-Civita, questi Rendiconti, vol. XXVI, 1917, pp. 458-470.

Le equazioni del moto che provengono da L non risultano ovviamente invarianti di fronte al cambiamento di t in $-t$, come lo sono invece quelle che provengono da una funzione lagrangiana ordinaria, non contenente i detti termini lineari. Nel caso ordinario il problema del moto si suol chiamare *reversibile*; ed *irreversibile* nel caso contrario. Il problema che noi vogliamo trattare è quindi irreversibile: per comodità di linguaggio, chiameremo irreversibile il sistema stesso.

Noi supporremo poi, che il primo termine del secondo membro della (2) costituisca una forma quadratica essenzialmente positiva e che i varî coefficienti di L, cioè a_{rs}, b_r e c, siano funzioni di q_1, q_2, q_3, ma siano indipendenti esplicitamente dal tempo.

In virtù di quest'ultima ipotesi, le equazioni del moto di Lagrange [compendiate nella (1)] ammettono il ben noto integrale

$$(3)\qquad \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = h\,.$$

L'esistenza della (3) permette di passare dalla (1) al *principio della minima azione* per il nostro problema, seguendo il criterio di Levi-Civita, al quale abbiamo accennato più sopra e che consiste nella eliminazione del tempo dalla equazione

$$(4)\qquad \delta\int (L+h)\,dt = 0\,,$$

[sostanzialmente equivalente alla (1)], mediante la (3).

Le operazioni materiali si eseguiscono con tutta facilità. Per la speciale forma della nostra funzione lagrangiana, la (3) assuma l'aspetto

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\sum_1^3{}_{rs} a_{rs}\,\dot{q}_r\,\dot{q}_s - c = h\,,$$

da cui, ponendo

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{rs} a_{rs}\,dq_r\,dq_s\,,$$

si ottiene

$$(6)\qquad \frac{dl^2}{dt^2} = 2(c+h) \quad \text{e quindi} \quad dt = \frac{dl}{\sqrt{2(c+h)}}\,.$$

Si ha d'altra parte, mercè la (5) e la posizione

$$\sum_1^3{}_r b_r \frac{dq_r}{dl} = M\,,$$

$$L + h = M\frac{dl}{dt} + 2(c+h)\,.$$

Sostituendo ora nella (4), in virtù della (6), si ottiene

$$\delta \int \left\{ \mathrm{M} + \sqrt{2(c+h)} \right\} dl = 0 \,, \tag{7}$$

che costituisce l'equazione da noi cercata.

Ne concludiamo che *le traiettorie dinamiche dei punti di un sistema irreversibile con tre gradi di libertà sono caratterizzate dal principio variazionale* (7), *il quale corrisponde all'ordinario principio della minima azione per i sistemi reversibili.*

2. Interpretazione dinamica. — Per passare ora alla interpretazione del principio variazionale dedotto nel paragrafo precedente, consideriamo un particolare sistema S^* con tre gradi di libertà costituito da tre soli punti P_1, P_2, P_3 *mobile in un campo conservativo*, la cui funzione delle forze indichiamo con U.

Sia $\Omega\xi\eta\zeta$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali fisso nello spazio; Ωxyz un secondo sistema la cui origine ed il cui asse delle z coincidano con la origine e l'asse delle ζ del sistema precedente. Supporremo poi che il sistema Ωxyz ruoti uniformemente attorno all'asse delle z.

Indicheremo con (x_i, y_i, z_i) le coordinate del punto P_i rispetto al sistema ruotante e con q_1, q_2, q_3 i parametri lagrangiani del sistema S^* costituito dai tre punti P_1, P_2, P_3. Sarà

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \;;\; y_i = y_i(q_1, q_2, q_3) \;;\; z_i = z_i(q_1, q_2, q_3) \;; \qquad (i = 1, 2, 3) \,. \tag{8}$$

I vincoli che realizzano il sistema S^* risultano in tal modo indipendenti dal tempo con referenza però agli assi ruotanti. In generale, rispetto agli assi fissi, dipenderanno anche da t.

Indicheremo con $\mathbf{V}_i$ la velocità assoluta del punto P_i e con T la forza viva del sistema espressa in coordinate ξ, η, ζ. Supponendo senz'altro le masse dei tre punti eguali tra loro ed eguali all'unità, avremo

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_i \, \mathrm{V}_i^2 \,.$$

Denotando ora con ω la velocità angolare (costante) del sistema Ωxyz e con $\mathbf{v}_i$ la velocità di P_i rispetto allo stesso sistema, sarà

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i + \omega \wedge (P_i - \Omega) \,,$$

da cui

$$\mathrm{V}_i^2 = v_i^2 + 2\omega(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) + \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) \,.$$

La forza viva $\mathfrak{T}$ del sistema S^* in coordinate x, y, z, sarà allora

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_i \left\{ v_i^2 + 2\omega(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) + \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) \right\} .$$

Determinata così la forza viva $\mathfrak{T}$, possiamo scrivere facilmente le equazioni del moto del nostro sistema S^*. Esse sono le equazioni di Lagrange, provenienti dalla funzione lagrangiana

$$L^* = \mathfrak{T} + U.$$

Esprimiamo ora L^* in funzione dei parametri lagrangiani q_1, q_2, q_3. Dalle (8) si ha

$$\dot{x}_i = \sum_1^3{}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r,$$

con due analoghe per $\dot{y}_i$ e $\dot{z}_i$, per cui ponendo

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} A_{rs} = A_{sr} &= \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial y_i}{\partial q_r}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial z_i}{\partial q_r}\frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right), \\ B_r &= \sum_1^3{}_i \left(x_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} - y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right), \end{aligned} \right.$$

si trova

$$\sum_1^3 v_i^2 = \sum_1^3{}_{rs} A_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s \quad ; \quad \sum_1^3{}_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_1^3{}_r B_r \dot{q}_r .$$

Assumiamo ora, per semplicità, $\omega = 1$ e poniamo ancora

$$\frac{1}{2} \sum_1^3{}_i (x_i^2 + y_i^2) + U = C.$$

La funzione L^*, espressa allora per q_1, q_2, q_3, diventa

$$(10)\qquad L^* = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{rs} A_{rs}\, \dot{q}_r\, \dot{q}_s + \sum_1^3{}_r B_r \dot{q}_r + C.$$

Tutto ciò premesso, noi ora possiamo compendiare le equazioni del moto del sistema S^* nell'equazione variazionale

$$\delta \int L^*\, dt = 0,$$

od anche, se ci farà comodo, nell'equazione

$$(11)\qquad \delta \int \left\{ L^* + \sum_1^3{}_r \frac{\partial \vartheta}{\partial q_r} \dot{q}_r \right\} dt = 0,$$

dove L^* ha l'espressione (10) e ϑ indica una funzione di q_1, q_2, q_3 a priori qualunque. Evidentemente il termine aggiunto, essendo un differenziale esatto, non reca contributo alcuno alla variazione dell'integrale.

L'interpretazione dinamica del problema del movimento dei sistemi irreversibili con tre gradi di libertà, a cui noi miriamo, si ottiene cercando di far coincidere le equazioni provenienti dalla (11), con quelle provenienti dalla (1).

La coincidenza è subito ottenuta, se si riesce a soddisfare all'equazione

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}^* + \sum_1^3{}_r \frac{\partial \vartheta}{\partial q_r} \dot{q}_r ,$$

che, tenuto conto delle espressioni che competono alle due funzioni L ed L*, si scinde ovviamente nelle seguenti

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_{rs} = a_{rs} . \\ \mathrm{B}_r + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial q_r} = b_r , \qquad (r . s = 1 , 2 , 3) \\ \mathrm{C} = c . \end{cases}$$

Osservando le espressioni esplicite di A_{rs}, B_r e C si vede facilmente che la U è contenuta solamente nella $\mathrm{C} = c$, la quale, d'altra parte, è in termini finiti, per cui si può staccare dalle altre e usufruirne appunto per la determinazione della U, note le x_i e y_i. Il secondo gruppo delle (12) può egualmente servire alla determinazione della ϑ, purchè però le x_i e y_i soddisfacciano alla condizione $\dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial q_r \, \partial q_s} = \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial q_s \, \partial q_r}$, cioè

$$\sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} - \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_r}{\partial q_s} - \frac{\partial b_s}{\partial q_r} \right) .$$

Per integrare le (12) basterà in definitiva associare queste tre equazioni con le sei $\mathrm{A}_{rs} = a_{rs}$, ciò che costituisce un sistema di nove equazioni nelle nove incognite x_i , y_i , z_i. Questo sistema ammette certamente una soluzione. La dimostrazione rigorosa, richiederà forse l'impiego dei metodi del sig. Riquier. Proponendoci di ritornare su questo argomento un'altra volta, per ora possiamo asserire che è possibile scegliere i vincoli da imporre ai tre punti $\mathrm{P}_1 , \mathrm{P}_2 , \mathrm{P}_3$, in modo che le equazioni che regolano il loro moto coincidano con quelle del moto del sistema S considerato nel n. 1.

Possiamo pertanto concludere col seguente enunciato:

Le traiettorie di un sistema dinamico irreversibile, con tre gradi di libertà, coincidono con quelle di un sistema ordinario costituito da tre soli punti opportunamente vincolati, mobile in un campo conservativo ruotante uniformemente attorno ad un asse.