ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

autore o combinazione di autori, e la ricerca avrebbe mantenuto lo stesso grado di serietà [1].

Il nuovo assaggio di scerpelloni vien modestamente imbandito ai lettori del Bulletin come una « idée nouvelle », che l'a. crede destinata a sollevare discussioni e critiche! ma anche qui egli s'inganna, perocchè la prima ed ultima critica che è potuta toccare al suo lavoro si è fatta solo per biasimar l'audacia dell'averlo mandato ad inserire nel Bulletin. L'atto è tanto più riprovevole, in quanto che dell'errore principale (scambio dei due assi) avevamo già avvertito l'a. in una nostra Noticina dell'anno scorso [2].

Meccanica. — *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

È noto che la soluzione dei problemi relativi al moto dei giroscopi rigidi pesanti può in generale ridursi all'integrazione delle equazioni differenziali di Euler-Poisson. Nel 1882, W. Hess [3], mediante la considerazione di tre grandezze invariantive che hanno un significato geometrico e cinematico ben preciso, riuscì a mettere le dette equazioni sotto una *nuova forma* che poi, nel 1903, fu utilmente modificata, specie per lo studio dei

[1] A pag. 497 del II Tomo di Tisserand (Méc. cél., chap. XXIX, scritto da Radau) si trovano registrati i diversi valori ottenuti per la semiamplitudine della nutazione diurna dell'asse di inerzia, in epoca prechandleriana. Di essi il nostro a. è stato fortunato a scegliere il più grande, 0",125, che, come dicemmo, è identico col valor medio, dato oggi dalla polodia. Verificato poi tal valore col metodo sbrigativo che abbiamo visto, se ne fa arme contro il metodo differenziale di determinazione della costante d'aberrazione, proposto da Küstner. Anche nelle Note pubblicategli dall'Accademia di Torino egli scopriva in quel metodo un *falso supposto!*

In tutto il suo discorso l'a. si dimentica della nutazione diurna dell'asse rotatorio rispetto allo sferoide, forse perchè la giudica trascurabile a petto della enorme nutazione che allo stesso asse ha attribuito rispetto allo spazio. *Majora premunt.* Però avrebbe dovuto ricordarsene là dove si trattava di calcolare il decuplo dell'effetto lunare sulla latitudine di Pino. L'onda teorica che egli ha rappresentata a pag. 293 del Bulletin, è erronea, specialmente per ciò che riguarda la fase, ossia le epoche dei massimi e dei minimi, e l'errore nasce appunto dal non aver considerato il termine di nutazione.

[2] Vedi: V. Cerulli, *Sulla nutazione diurna*. Rend. R. Accad. Lincei, XXVII, pag. 166.

[3] W. Hess, *Ueber das Problem der Rotation* [Mathematische Annalen, Bd. 20, pp. 461-470, a. 1882].

giroscopi asimmetrici, dallo Schiff (¹). Le equazioni del moto sotto questa ultima forma vengono generalmente indicate col nome di « *equazioni differenziali ridotte* » o anche « *equazioni di Hess-Schiff* ».

Però, come ha dimostrato lo Stäckel (²), queste equazioni non sono sempre equivalenti a quelle di Euler-Poisson, e l'averne ammessa come intuitiva l'equivalenza condusse qualche A. a conclusioni errate.

Utilizzando i risultati dello Stäckel, io mi propongo, in questa Nota e in altre successive, di studiare per via intrinseca e in modo sistematico la questione dell'equivalenza fra i detti sistemi di equazioni differenziali e di trattare poi dettagliatamente i casi eccezionali che da questo studio vengon fuori.

La superiorità del metodo qui adottato è messa in rilievo, oltre che dalla immediata e diretta interpretazione geometrica e cinematica delle formole, principalmente dal fatto che la estrema semplicità dei calcoli adoperati ha permesso anche di risolvere, e in modo quasi intuitivo, alcune interessanti questioni che lo Stäckel, per difficoltà insormontabili di calcolo, non era riuscito ad affrontare.

1. Forma intrinseca delle equazioni di Euler Poisson e degli integrali del moto. — Sia α l'omografia d'inerzia del sistema rispetto al punto fisso O, ed Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione attorno a questo punto; indicando con apici le derivate rispetto al tempo e con $\mathbf{M}_e$ il vettore del momento, rispetto ad O, dell'impulso dovuto alle forze esterne al sistema, l'equazione intrinseca del moto può notoriamente scriversi [3]:

$$(\alpha\,\Omega)' = \mathbf{M}_e .$$

Ora, supponendo che le forze esterne siano esclusivamente quelle dovute alla gravità e indicando rispettivamente con μ e G il peso e il baricentro del corpo, si ha

$$\mathbf{M}_e = \mu\mathbf{k} \wedge (\mathrm{G} - \mathrm{O})$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore unitario, fisso nello spazio, parallelo alla verticale e rivolto verso l'alto. Posto ancora, per semplicità di scrittura,

$$(1) \qquad \mu = 1 \quad , \quad \mathrm{G} - \mathrm{O} = \mathbf{g}$$

(¹) P. A. Schiff, *Sulle equazioni differenziali del moto di un corpo rigido pesante attorno ad un punto fisso* (in russo). [Raccolta matematica di Mosca, vol. 24, pp. 169-177, a. 1903].

(²) P. Stäckel, *Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels* [Mathem. Annalen, Bd. 67, pp. 399-432, a. 1909].

(³) C. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, 1913, T. II, pag. 4. Questo testo sarà indicato in seguito, per brevità, con le iniziali A. V. G.

si ricava l'equazione del moto

$$(\alpha\Omega)' = \mathbf{k} \wedge \mathbf{g} \tag{I}$$

che equivale al noto sistema di Euler [1]. Tenendo presente che (v. A. V. G., T. II, pag. 1)

$$\alpha' = \Omega \wedge \alpha - \alpha \,.\, \Omega \wedge$$

la (I) può anche scriversi

$$\alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega = \mathbf{k} \wedge \mathbf{g}\,. \tag{I'}$$

Il fatto che il vettore unitario $\mathbf{k}$ *è fisso nello spazio* si traduce nell'equazione

$$\mathbf{k}' = 0 \tag{II}$$

la quale può sostituire il solito sistema delle equazioni di Poisson [2]

Le equazioni (I) e (II) ammettono notoriamente (A. V. G., T. II, pag. 10) i tre integrali

$$\mathbf{g} \times \mathbf{k} = h - \mathrm{T} \tag{2}$$

$$\alpha\Omega \times \mathbf{k} = k \tag{3}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1 \tag{4}$$

dove h e k sono costanti d'integrazione e T è l'energia cinetica del sistema.

Le equazioni (2) e (3) rappresentano rispettivamente l'*integrale delle forze vive e quello delle aree*, e la (3) esprime anche che « *durante il*

(1) O. Lazzarino, *Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski relativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso* [Rend. della R. Acc. di Napoli, vol. XVII, a. 1911].

(2) Per ottenere sotto forma assoluta l'equazione che equivalga, anche formalmente, alle note equazioni di Poisson, basta osservare che se $\mathbf{u}$ e λ sono rispettivamente un vettore ed una *isomeria vettoriale*, ad invariante terzo positivo, funzioni del tempo, si ha notoriamente [cfr. C. Burali-Forti, *I moti relativi nel calcolo assoluto*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, 1° sem. 1917]

$$\mathbf{u}' = \lambda \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{u})}{dt} + \Omega \wedge \mathbf{u} \tag{a}$$

dove il 1° termine del 2° membro rappresenta il vettore che di solito, ma inesattamente, è chiamato « *derivata di* $\mathbf{u}$ *rispetto agli assi mobili* ». Osservando ora che, essendo $\mathbf{k}$ fisso nello spazio, si ha $\mathbf{k}' = 0$ e ponendo $\lambda \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{k})}{dt} = (\mathbf{k}')$, si ottiene dalla (*a*) l'equazione

$$(\mathbf{k}') = \mathbf{k} \wedge \Omega \tag{b}$$

che equivale, anche formalmente, alle equazioni di Poisson.

Poichè questa forma (*b*) portava nel seguito delle inutili complicazioni, ho preferito sostituirla con l'altra $\mathbf{k}' = 0$ che sostanzialmente equivale a questa.

moto, la proiezione verticale del vettore $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ *dell'impulso si mantiene costante* ».

Ponendo $P = O + \alpha\Omega$, il punto P descriverà la *prima curva d'impulso* e, osservando che per la (I) si ha [1]

$$P' = (\alpha\boldsymbol{\Omega})' = \mathbf{k} \wedge \mathbf{g},$$

$$P'' = \mathbf{k} \wedge \mathbf{g}' = \mathbf{k} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{k} \times \mathbf{g} \,.\, \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} \,.\, \mathbf{g},$$

si può concludere che « *la velocità, con cui il punto P descrive la prima* « *curva d'impulso, è normale al piano di* $\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{g}$ *ed è proporzionale al* « *seno dell'angolo che il vettore* $\mathbf{g}$ *forma con la verticale; l'accelera-* « *zione di P è complanare con i vettori* $\boldsymbol{\Omega}$ *e* $\mathbf{g}$.

2. Definizione degli invarianti principali S, T, U e forma intrinseca delle equazioni di Hess. — Le grandezze S, T, U sono definite dalle relazioni

$$\text{(III)} \qquad S = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{g} \ ; \ 2T = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \ ; \ 2U = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}$$

e rappresentano rispettivamente le proiezioni del vettore $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ dell'impulso secondo i tre vettori $\mathbf{g}, \boldsymbol{\Omega}, \alpha\boldsymbol{\Omega}$; le due ultime rappresentano ancora rispettivamente l'energia cinetica del sistema e il quadrato del modulo di $\alpha\boldsymbol{\Omega}$.

Queste grandezze, essendo date da prodotti scalari tra vettori che non dipendono da eventuali sistemi di coordinate, sono *invariantive* nel senso che sono indipendenti da eventuali sistemi di assi di riferimento, pur potendo essere, come effettivamente sono, funzioni del tempo.

Dalle (III) è facile dedurre le equazioni del moto in funzione di S', T', U': infatti, derivando le (III) rispetto al tempo e tenendo conto della (I'), si ha

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} a) \quad S' = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ b) \quad T' = \boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} \wedge \mathbf{g} \\ c) \quad U' = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} \wedge \mathbf{g}. \end{cases}$$

I sistemi (III) e (IV) dànno rispettivamente le proiezioni dei vettori $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ e $\alpha\boldsymbol{\Omega}'$ sui vettori $\mathbf{g}, \boldsymbol{\Omega}, \alpha\boldsymbol{\Omega}$ e la conoscenza di tali proiezioni permette di ottenere le espressioni dei vettori stessi. Infatti, applicando alle (III) e alle (IV) un noto procedimento [2], si hanno rispettivamente le relazioni

[1] Cfr. R. Marcolongo, *Sul moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso.* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVII, 2° sem. 1908].

[2] La risoluzione dei sistemi di equazioni lineari vettoriali del tipo III e IV, cioè del tipo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = a \quad , \quad \mathbf{b} \times \mathbf{k} = b \quad , \quad \mathbf{c} \times \mathbf{k} = c$$

colla formula:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} \,.\, \mathbf{k} = a\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + b\,\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + c\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

trovasi in Hamilton, *Elements of Quaternions* (2d Edit., 1899), vol. I pag. 341.

$$(5)\quad \begin{cases} a) & \mathbf{g}\times\Omega\wedge\alpha\Omega\,.\,\alpha\Omega = \mathrm{S}\,.\,\Omega\wedge\alpha\Omega + 2\mathrm{T}\,.\,\alpha\Omega\wedge\mathbf{g} + 2\mathrm{U}\,.\,\mathbf{g}\wedge\Omega \\ b) & \mathbf{g}\times\Omega\wedge\alpha\Omega\,.\,\alpha\Omega' = \mathrm{S}'\,.\,\Omega\wedge\alpha\Omega + \mathrm{T}'\,.\,\alpha\Omega\wedge\mathbf{g} + \mathrm{U}'\,.\,\mathbf{g}\wedge\Omega \end{cases}$$

dalle quali risulta ancora che, per poter determinare mediante le (III) e le (IV) rispettivamente i vettori $\alpha\Omega$ e $\alpha\Omega'$, non basta conoscere le grandezze S, T, U e S', T', U' con i relativi coefficienti, occorre anche che sia soddisfatta la condizione

$$(6)\qquad \mathbf{g}\times\Omega\wedge\alpha\Omega \neq 0\,,$$

Si ha quindi questo risultato, particolarmente notevole per quel che segue, che cioè « *nei casi in cui non è verificata la* (6), *non è possibile risolvere mediante le equazioni* (III) *e* (IV) *il problema del moto* ».

3. Ricerca per via intrinseca delle equazioni differenziali di Schiff. — Considerando le equazioni (2), (3) e (IV_c), che dànno le proiezioni del vettore $\mathbf{k}$ sui vettori $\mathbf{g}$, $\alpha\Omega$, $\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega$, e applicandovi il citato procedimento [1], si ha la relazione

$$(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)^2\,.\,\mathbf{k} = (h-\mathrm{T})\,.\,\alpha\Omega\wedge(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega) + k(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)\wedge\mathbf{g} + \mathrm{U}'\,.\,\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega$$

ossia, sviluppando i doppî prodotti vettoriali,

$$\begin{aligned}(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)^2\,\mathbf{k} = (h-\mathrm{T})\,&[(\alpha\Omega)^2\,\mathbf{g} - \alpha\Omega\times\mathbf{g}\,.\,\alpha\Omega] + \\ &+ k[\mathbf{g}^2\,.\,\alpha\Omega - \alpha\Omega\times\mathbf{g}\,.\,\mathbf{g}] + \mathrm{U}'\,.\,\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega\end{aligned}$$

e quindi, applicando la nota formola che dà il quadrato di un prodotto esterno e tenendo conto delle (III), si ha l'equazione

$$(\mathrm{V})\quad (2\mathrm{U}\mathbf{g}^2-\mathrm{S}^2)\,\mathbf{k} = (h-\mathrm{T})(2\mathrm{U}\mathbf{g}-\mathrm{S}\,.\,\alpha\Omega) + k[\mathbf{g}^2\,.\,\alpha\Omega - \mathrm{S}\,.\,\mathbf{g}) + \mathrm{U}'\,.\,\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega$$

che dà l'espressione del vettore $\mathbf{k}$ in funzione di S, T, U, ... e permette di determinarlo, purchè sia $2\mathrm{U}\,\mathbf{g}^2 - \mathrm{S}^2 \neq 0$.

Facendo poi il quadrato della (IV_c) con una nota formola [2] e tenendo conto delle (III), si ha l'equazione

$$\mathrm{U}'^2 = \begin{vmatrix} 2\mathrm{U} & k & \mathrm{S} \\ k & 1 & h-\mathrm{T} \\ \mathrm{S} & h-\mathrm{T} & \mathbf{g}^2 \end{vmatrix}$$

(1) Idem, vedi nota (3), pag. 328.

(2) A. Guglielmi, *Prodotto di due prodotti vettoriali misti* ecc. Bollettino della « Mathesis », a. 1919.

Dati tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ non complanari, il quadrato del prodotto misto può essere espresso sotto la forma

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}^2 & \mathbf{u}\times\mathbf{v} & \mathbf{u}\times\mathbf{w} \\ \mathbf{u}\times\mathbf{v} & \mathbf{v}^2 & \mathbf{v}\times\mathbf{w} \\ \mathbf{u}\times\mathbf{w} & \mathbf{v}\times\mathbf{w} & \mathbf{w}^2 \end{vmatrix}$$

cioè

$$U'^2 = \mathbf{g}^2(2U - k^2) - 2U(h - T)^2 + 2kS(h - T) - S^2$$

la quale dà l'espressione di U' in funzione di S, T, U e di grandezze indipendenti dal tempo.

D'altra parte, sostituendo la (V) nella (IV_b), si ottiene l'equazione

$$(2U\mathbf{g}^2 - S^2)\,T' = [S(h - T) - k\,\mathbf{g}^2]\,S' + [2\,\mathbf{g}^2 . T - \mathbf{g} \times \Omega . S]\,U'$$

che è una relazione lineare ed omogenea fra le derivate T', S', U'.

Associando ora a questa equazione ed alla precedente la (VI_a), che non contiene **k**, si ottiene il sistema delle equazioni differenziali di Schiff sotto la forma:

$$(VI)\left\{\begin{array}{ll} a) & S' = \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega \\ b) & (2U\mathbf{g}^2 - S^2)\,T' = [S(h - T) - k\mathbf{g}^2]\,S' + [2\mathbf{g}^2 . T - \mathbf{g} \times \Omega . S]\,U' \\ c) & U'^2 = \mathbf{g}^2(2U - k^2) - 2U(h - T)^2 + 2kS(h - T) - S^2 \end{array}\right.$$

ove, oltre gl'invarianti principali S, T, U, le loro derivate e le costanti h, k, $\mathbf{g}^2$, figura anche la grandezza scalare $\mathbf{g} \times \Omega$ la quale ha pure evidentemente *carattere invariantivo*, sempre nel senso che non dipende da eventuali sistemi di assi coordinati.

Posto $P = O + \Omega$, le equazioni (III) si scrivono

$$(III')\qquad \mathbf{g} \times \alpha(P - O) = S \quad ; \quad (P - O) \times \alpha(P - O) = 2T\,;$$

$$(P - O) \times \alpha^2(P = O) = 2U$$

e rappresentano rispettivamente un piano π, un ellissoide E omotetico a quello d'inerzia e un ellissoide E' coassiale con E. Gli ellissoidi E, E' si tagliano in una quartica gobba di 1ª specie $\boldsymbol{\Gamma}$, simmetrica rispetto ai piani principali dell'ellissoide E, la quale è tagliata dal piano π in quattro punti, al più, ai quali corrispondono altrettante espressioni di Ω in funzione di S, T, U. Sostituendo poi queste espressioni di Ω nei secondi membri delle (VI), questi diventano funzioni note di S, T, U.

Nelle (VI) non figura esplicitamente il tempo t e quindi, ricavando dt dalla (VI_c), le (VI) si possono ridurre ad un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine rispetto ad S' e T' con coefficienti algebrici, e perciò la determinazione delle grandezze S e T in funzione di U dipende da una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine con coefficienti algebrici; il tempo può essere poi determinato mediante una quadratura. Quindi, in generale, si può dire che « *la determinazione del moto del giroscopio pe-*

« *sante dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del 2°*
« *ordine, a coefficienti algebrici, che il metodo di Schiff permette, almeno*
« *teoricamente, di formare* » (¹).

Batteriologia agraria. — *Su la presenza di una specie batterica nelle radici della Diplotaxis erucoides DC*[2]. Nota di R. Perotti, presentata dal Socio G. Cuboni.

È diffusa opinione fra gli agricoltori della Campagna Romana che la *Diplotaxis erucoides* DC., volgarmente conosciuta con il nome di « rughetta » sia una pianta fertilizzante del terreno; e, come tale, viene sovesciata negli orti e nei vigneti dove si riproduce abbondantemente.

Volendo indagare se e quanto di fondato vi fosse in tale opinione, procedetti ad alcuni prelevamenti di detta crucifera in differenti terreni del suburbio della città; e fino dai primi esami si palesò la esistenza costante di una specie batterica nello strato corticale delle sue radici; specie che venne da me isolata e nella quale, nella presente Nota, riferisco preliminarmente.

Con l'esame macroscopico è agevole distinguere in una radice di *Diplotaxis* di medie dimensioni tre regioni, che, a partire dal colletto, sono caratterizzate dai seguenti fatti:

1° una regione estesa per due o tre centimetri, nella quale si ha la presenza di galle determinate dall'attacco del *Ceutorrhynchus pleurostigma* March., delle crucifere;

2° una seconda regione, che va dai tre ai dieci centimetri, in cui la corteccia della radice si presenta più o meno profondamente corrugata e la ramificazione è molto irregolare;

3° una regione terminale, al di là dei dieci centimetri, in cui la radice si presenta sotto ogni aspetto normale.

Fatto un preparato microscopico della polpa delle galle si osservano forme batteriche un po' rare, ma che si scoprirono numerosissime nello spap-

(¹) Cfr. R. Marcolongo, loc. cit. — Non è forse inutile ricordare qui anche un'osservazione del Cerruti [*Corso di Meccanica sup.*, a. 1894-95] messa in rilievo dal prof. Marcolongo, che cioè la riduzione ora indicata è conseguenza del seguente teorema sulle equazioni canoniche del moto: « *Se di un sistema hamiltoniano di ordine* $2n$ *si* « *conoscono m integrali in involuzione, l'integrazione si potrà far dipendere da quella* « *di un sistema hamiltoniano di ordine* $2(n-m)$ *e da m quadrature* ». — Infatti, nel caso del giroscopio pesante, essendo $n=3$ ed $m=2$, risulta $2(n-m)=2$ e quindi la integrazione del sistema può ridursi a quella di un'equazione differenziale del 2° ordine.

(²) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia agraria della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.