ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

meni di Fraunhofer, questi termini sono di primo grado. Accadrà il primo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine eguale o maggiore di ξ e η; accadrà, invece, il secondo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine minore di ξ e η, o per valersi di ϱ infinitamente grandi. Queste particolarità, a rigore, possono verificarsi tanto nel caso in cui il centro luminoso A_0 è infinitamente lontano, quanto in quello in cui A_0 è al finito. Possiamo, però, notare che se A_0 è infinitamente lontano, non si possono produrre fenomeni di Fresnel, e ciò nel senso che, nelle corrispondenti ipotesi, il campo d'osservazione non potrebbe essere più grande del foro diffrangente stesso, ossia infinitesimo.

Geometria. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette* [1]. Nota II del Corrisp. GUIDO FUBINI.

5. *Complessi lineari*. Usiamo coordinate omogenee tali che la prima x di esse valga 1; sarà $x_{rs} = X = 0$ e per (16) $b_{rs} = \lambda c_{rs}$ ove $\lambda = -\xi$. Supponiamo poi di scegliere a parametri u_1, u_2, u_3 le ultime tre coordinate proiettive p, q, r. Ricordando la definizione delle derivate covarianti, avremo per (16)

$$\binom{hk}{1} = -p_{hk} = -\Big[a_{hk}\,\mathrm{P} + e_{hk}(\pi + \lambda p)\Big];\ \binom{hk}{2} = -a_{hk}\,\mathrm{Q} - c_{hk}(\varkappa + \lambda q);$$
$$\binom{hk}{3} = -a_{hk}\,\mathrm{R} - c_{hk}(\varrho + \lambda r);$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_h\,\partial u_k} = y_{hk} + \Sigma\binom{hk}{r} y_r = a_{hk}\Big[\mathrm{Y} - py_1 - qy_2 - ry_3\Big] +$$
$$+ c_{hk}\Big[\eta + \lambda y - (\pi + \lambda p)\,y_1 - (\varkappa + \lambda q)\,y_2 - (\varrho + \lambda r)y_3\Big]$$

che, con notazioni, che si spiegano da sole, noi scriveremo

$$(23)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u_h\,\partial u_k} = a_{hk}\,\overline{\mathrm{Y}} + c_{hk}\,\overline{\eta} \text{ insieme all'analoga } \frac{\partial^2 z}{\partial u_h\,\partial u_k} = a_{hk}\,\overline{\mathrm{Z}} + c_{hk}\,\overline{\zeta}.$$

Dimostriamo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un complesso sia lineare è che la forma χ sia nulla.* La $(16)_{bis}$ dimostra che la condizione è necessaria. Viceversa se $\chi = 0$, cioè $c_{hk} = 0$, la (23) dimostra che, se $\overline{\mathrm{Y}} = 0$, le derivate seconde di y sono nulle; cioè y è funzione lineare di $p = u_1$, $q = u_2$, $r = u_3$, $x = 1$; e il complesso è lineare. Invece, se $\overline{\mathrm{Y}} \neq 0$, le (23) dimostrano che si può trovare una quantità μ tale che

[1] In questi Rendiconti, vol. XXVII, 2° sem. 1918, pp. 304-311.

$\frac{\partial^2 z}{\partial u_h \partial u_k} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} = 0$. Derivando rispetto u_t, e sottraendone il risultato ottenuto permutando k con t, si trova $\mu_t \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_k} - \mu_k \frac{\partial^2 y}{\partial u_h \partial u_t} = 0$; cioè per (23) e per la $\overline{Y} \neq 0$, si trae $\mu_t a_{hk} - \mu_k a_{ht} = 0$. E poichè $\Delta \neq 0$, sarà $\mu_t = 0$, cioè $\mu = \text{cost}$. Cosicchè $z - \mu y$ è funzione lineare delle u_i, 1, cioè delle p, q, r, x. E il complesso è ancora lineare.

Uno studio ben facile da farsi in generale sarebbe quello di studiare coi nostri metodi tutte le congruenze contenute in un dato complesso, e trovare le relazioni tra i loro invarianti proiettivi. Noi ci accontenteremo di provare che: *Se tutte le congruenze di un dato complesso sono* W, *il complesso è lineare*. Una congruenza del complesso si ottiene ponendo u_3 uguale ad una funzione $f(u_1, u_2)$ delle u_1, u_2: essa sarà W *se il determinante delle* $x, \frac{dx}{du_r}, \frac{d^2x}{du_h\, du_k}$ (per $h, k = 1, 2$) *è nullo*. Scrivo i d anzichè i ∂, per ricordare che nel derivare si deve considerare u_3 come funzione delle u_1, u_2. Sarà:

$$
(24) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du_k} = \dfrac{\partial x}{\partial u_k} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial u_k} \qquad \text{(e analoghe in } y, z \text{ ecc.)} \qquad (h, k = 1, 2) \\[2ex] \dfrac{d^2x}{du_h\, du_k} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_h \partial u_k} + \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} \dfrac{\partial f}{\partial u_h} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_h \partial u_3} \dfrac{\partial f}{\partial u_k} + \\[2ex] \qquad + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u_k \partial u_3} \dfrac{\partial f}{\partial u_h} + \dfrac{\partial z}{\partial u_3} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_h \partial u_k}. \end{cases}
$$

Posto

$$
\alpha_{hk} = a_{hk} + a_{33} \frac{\partial f}{\partial u_h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + a_{3h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + a_{3k} \frac{\partial f}{\partial u_h},
$$

$$
\gamma_{hk} = c_{hk} + c_{33} \frac{\partial f}{\partial u_h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + c_{3h} \frac{\partial f}{\partial u_k} + c_{3k} \frac{\partial f}{\partial u_h},
$$

sarà per (23)

$$
\frac{d^2 f}{du_h\, du_k} = \alpha_{hk} \overline{Y} + \gamma_{hk} \overline{\eta} + \frac{\partial y}{\partial u_3} \frac{\partial^2 f}{\partial u_h \partial u_k} \quad \text{(e analoga in } z\text{)}.
$$

Essendo $x = 1, p = u_1, q = u_2, r = f$, il determinante che deve essere nullo, affinchè la congruenza sia W, si riduce a

$$
\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \\ \frac{d^2 y}{du_1^2} & \frac{d^2 y}{du_1\, du_2} & \frac{d^2 y}{du_2^2} \\ \frac{d^2 z}{du_1^2} & \frac{d^2 z}{du_1\, du_2} & \frac{d^2 z}{du_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} & \alpha_{11} & \gamma_{11} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} & \alpha_{12} & \gamma_{12} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} & \alpha_{22} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_3 & \overline{Y} & \overline{\eta} \\ z_3 & \overline{Z} & \overline{z} \end{vmatrix}
$$

Se il primo fattore del secondo membro è nullo *qualunque sia* f (cioè per ogni congruenza), allora le α sarebbero proporzionali alle γ, le a alle c, la φ alla χ; e per le relazioni (18) di coniugio sarebbe $\chi = 0$; e quindi il complesso *sarebbe lineare*. Se invece fosse nullo il secondo fattore, da (23) seguirebbe che le $\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_j}$ (coi ∂ storti) sarebbero proporzionali alle $\frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j}$; e, come sopra, si troverebbe ancora che il complesso è lineare.

Le formole qui svolte possono essere utili allo studio delle congruenze contenute in un dato complesso.

6. *Congruenze.* Abbiamo due complessi ξ, ξ' definiti da (12):

$$(12)_{bis} \quad \xi = D_2 x + x\,S\,X\,D_2 x \text{ (ove si ponga } du_s = R_s) \text{ (e analoghe in } \eta, \text{ ecc.)}$$

$$(12)_{ter} \quad \xi' = D_2 x + x\,S\,X\,D_2 x \text{ (ove si ponga } du_s = R'_s).$$

Se le $x, y, \ldots$ non fossero normali, si noterebbe che le ξ, ξ' restano moltiplicate per ϱ, quando le $x, y, \ldots$ si moltiplicano per un fattore ϱ.

L'espressione

$$(25) \qquad W = \frac{1}{\Delta^2}(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}) \text{ [1]}$$

è nulla per tutte e sole le congruenze W, *non muta cambiando le variabili coordinate* u_r (è *intrinseca*) e resta moltiplicata per $\frac{1}{\varrho^2}$ se moltiplichiamo le $x, y, \ldots$ per ϱ, e quindi φ per ϱ^2, Δ per ϱ^4. *Escluse le congruenze* W (da riguardarsi come *anormali*), i calcoli si presentano nel modo più semplice, se noi scegliamo ϱ *in guisa che* W *sia l'unità.* Avremo così completamente determinate sia le coordinate *normali* di una retta della congruenza, sia *la forma* φ, *che, assunta come elemento lineare, definisce una metrica completamente individuata dalla congruenza, e che si conserva per trasformazioni proiettive.* Evidentemente il determinante

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, X, \xi, \xi') = \frac{\Delta^2 W}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11}}{2} & A_{12} & \frac{A_{22}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & R_1^2 & 2R_1 R_2 & R_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & R_1'^2 & 2R'_1 R'_2 & R_2'^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta}} W(R_1 R'_2 - R_2 R'_1)(A_{11} R_2 R'_2 - A_{12}[R_1 R'_2 + R_2 R'_1] + A_{22} R_2 R'_2) = iW$$

[1] Chiamo W questa espressione appunto perchè essa è nulla per le congruenze W (congruenze di rette, le cui coordinate soddisfano a una stessa equazione lineare omogenea del 2° ordine).

in virtù delle (14). Cioè

$$(26)\qquad \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, X, \xi, \xi')\right]^2 = - W^2 = -1.$$

Il primo membro si riconosce subito (per la regola che insegna a formare il quadrato di un determinante) uguale, in virtù delle (1), (2), (4), (10), (13), a un determinante, che facilmente si calcola essere $-(S\xi^2 S\xi'^2 - [S\xi\xi']^2)$. Quindi:

$$(26)_{bis}\qquad S\xi^2 S\xi'^2 - (S\xi\xi')^2 = 1.$$

Porremo:

$$(27)\quad \bar\xi = \xi S\xi\xi' - \xi' S\xi^2 \quad ; \quad \bar\xi' = \xi' S\xi\xi' - \xi S\xi'^2 \text{ e analoghe in } \bar\eta, \text{ ecc.}$$

(Se le x, y non fossero normali, porremmo $\bar\xi = \dfrac{\xi S\xi\xi' - \xi' S\xi^2}{\sqrt{S\xi^2 S\xi'^2 - (S\xi\xi')^2}}$, ecc. Le $\bar\xi$, $\bar\xi'$ così definite resterebbero come le ξ, ξ' moltiplicate per ϱ, quando si moltiplichino per ϱ le x, ecc.). Sarà per (26) e (27)

$$(28)\quad S\bar\xi^2 = S\xi^2 \; ; \; S\bar\xi'^2 = S\xi'^2 \; ; \; S\bar\xi\bar\xi' = -S\xi\xi' \; ; \; S\xi\bar\xi = S\xi'\bar\xi' = 0.$$

I complessi $\bar\xi, \bar\xi'$ *sono quei complessi del fascio determinato dai complessi* ξ, ξ', *che sono in involuzione con* ξ *e* ξ'; *cosicchè i complessi* $\xi, \xi', \bar\xi, \bar\xi'$ *appartengono a uno stesso fascio in involuzione coi complessi* x, x_1, x_2, X. *In questo fascio esistono i complessi* $\xi + i\bar\xi$ *che sono evidentemente speciali.* Cioè, essendo per (28) $S(\xi \pm i\bar\xi)^2 = 0$, *le due rette aventi per coordinate* $\xi \pm i\bar\xi$ *sono le direttrici della congruenza comune al fascio dei complessi* $\xi, \bar\xi, \xi', \bar\xi'$ *e quindi sono le due rette comuni ai complessi* x, x_1, x_2, X. *Esse sono le rette* [1] *tangenti coniugate della* x *alle due falde focali* (rette focali principali) *e le rette* $x + \beta(\xi \pm i\bar\xi)$ *descrivono al variare di* β *i due fasci di rette focali* (tangenti alle falde focali). *I due fasci coniugati, cioè i fasci di rette che hanno per centro il centro di un fascio focale e per piano il piano dell'altro fascio sono i cosiddetti fasci centrali. I complessi* $\bar\xi$ *e* $\bar\xi'$ *sono i complessi che chiameremo satelliti o di accompagnamento, che contengono i fasci centrali corrispondenti a un punto di una falda focale e ai punti infinitamente vicini. La involuzione determinata nei fasci focali dalle intersezioni coi due complessi* $\Sigma x_{ij} R_i du_j$ *e* $\Sigma x_{ij} R'_{ij} du_j$ *è la involuzione delle tangenti coniugate alle falde focali.* (*I fasci focali costituiscono l'intersezione dei*

[1] Per questi teoremi cfr. Wälsch, Wiener Sitzungsberichte, 1891, IIA, Tomo 100. I complessi $\bar\xi, \bar\xi'$ sono i *Begleitcomplexe* del Wälsch.

complessi x, x_1, x_2). Di questo fatto ci potremmo servire per scrivere le equazioni differenziali delle assintotiche alle falde focali (più complicato, ma non difficile, è il problema di scrivere tutte le altre forme relative alle falde focali).

Oltre a W noi abbiamo trovato in $\Sigma\xi^2, \Sigma\xi'^2, \Sigma\xi\xi'$ (legati dalla 26_{bis}) altri invarianti di una congruenza. Per trovare il sistema completo di tali invarianti, e le loro mutue relazioni, dobbiamo però ora seguire una via più analitica.

Potremmo cercare delle formole $x_{rs} - a_{rs} X = b_{rs}\xi + c_{rs}\xi' + g_{rs} x$, come per il caso dei complessi, e cercar poi di dedurne le derivate delle X, ξ, ξ'. Per questa via troveremmo, oltre alla φ, le forme $\Sigma b_{rs} du_r du_s$, $\Sigma c_{rs} du_r du_s$, $\Sigma g_{rs} du_r du_s$ per definire una congruenza. Noi preferiamo seguire altra via, e otterremo, oltre alle φ, *una sola* forma Φ di *quarto* grado. E, volendo, non sarebbe difficile sostituire a Φ delle forme di *secondo* grado. Infatti ogni forma di quarto grado, col procedimento già da me studiato altrove di *divisione covariante*, si può scrivere in uno e in un solo modo nella forma $\Phi = I\varphi^2 + \psi\varphi + \chi\overline{\chi}$, ove $\psi, \chi, \overline{\chi}$ sono forme di *secondo* grado coniugate alla φ, e le $\chi, \overline{\chi}$ sono coniugate tra loro. (Se p. es. $\varphi = 2a_{12} du_1 du_2$, cioè se le u_1, u_2 sono le sviluppabili della congruenza, la ψ sarebbe del tipo $b_{11} du_1^2 + b_{22} du_2^2$ e le $\chi, \overline{\chi}$ del tipo $c_{11} du_1^2 \pm c_{22} du_2^2$). Cosicchè, invece di dare la Φ, si potrebbero dare l'invariante I, e le due forme ψ, χ. (L'invariante I resta determinato dalla $W^2 = 1$, quando sieno date le forme φ, ψ, χ).

7. *La forma Φ di quarto grado.* Ricordando la (8) porremo:

$$\Phi = \Sigma k_{rspq} du_r du_p du_s du_q = S\, dx\, D_3 x = -S(D_2 x)^2 . \tag{29}$$

Per le regole di derivazione coi differenziali controvarianti è

$$S\, dx\, d^3 x = \Sigma a_{rs} du_r \delta^3 u_s + \Phi \; ; \; S(d^2 x)^2 = \Sigma a_{rs} \delta^2 u_r \delta^2 u_s - \Phi . \tag{30}$$

La somma delle (30) dà $\frac{1}{2} d^2\varphi = \Sigma a_{rs} du_r \delta^3 u_s + \Sigma a_{rs} \delta^2 u_r \delta^2 u_s$, che è un'identità già da me trovata al loc. cit. Ognuna delle (30) dà una nuova definizione di Φ. Tutte queste definizioni dimostrano che Φ è, come φ, *una forma intrinseca*; cosicchè essa *è completamente determinata* se le $x, y \ldots$ sono coordinate normali; se le coordinate non fossero normali, allora, moltiplicando $x, y, \ldots$ per ϱ essa si muterebbe in

$$\overline{\Phi} = \varrho^2 \Phi + \varphi^2 \Delta_1 \varrho + 2\varphi(\varrho D_2 \varrho - 2d\varrho^2) . \tag{9$_{bis}$}$$

Indicati con (rs, hk) i simboli di Riemann a quattro indici per φ, una nota formola del Ricci di calcolo assoluto dà l'identità

$$x_{rst} - x_{rts} = - \sum_{p,q} (st, rp) A_{pq} x_q . \tag{31}$$

Se ne deduce, posto (cfr. le 21)

$$h_{rspq} = - S x_{rs} \, x_{pq} = S x_r \, x_{pqs} \tag{32}$$

che: *Le* h_{rspq} *sono simmetriche nei quattro indici, eccettuato* $h_{1122} = h_{2211}$ *e* $h_{1212} = h_{2112} = h_{2121} = h_{2112}$ *per cui vale la*

$$h_{1212} - h_{1122} = (21, 21) . \tag{33}$$

Confrontando con (29), e ricordando che le k sono *simmetriche* nei quattro indici, si deduce:

$$k_{iiij} = h_{iiij} \quad (i, j = 1, 2) \quad ; \quad h_{1212} = k_{1122} + \tfrac{1}{3}(21, 21) ;$$
$$h_{1122} = k_{1122} - \tfrac{2}{3}(21, 21) . \tag{34}$$

Date le forme Φ, φ, *tutte le* h *ne risultano determinate.*

Dalla (25) si deduce subito il valore di W^2 (che noi abbiamo posto uguale ad 1)

$$W^2 = \frac{1}{\Delta^3} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ a_{12} & h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ a_{22} & h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix} . \tag{35}$$

Io dico che anche

$$W^2 = \begin{vmatrix} 0 & A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ a_{11} & H_{1111} & H_{1112} & H_{1122} \\ a_{12} & H_{1211} & H_{1212} & H_{1222} \\ a_{22} & H_{2211} & H_{2212} & H_{2222} \end{vmatrix} \tag{35$_{bis}$}$$

ove

$$H_{rspq} = \sum_{i,j} A_{ri} \, A_{sj} \, h_{ijpq} . \tag{36}$$

Infatti, moltiplicando il secondo membro di $(35)_{bis}$ per

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 & 2a_{11} \, a_{12} & a_{12}^2 \\ 0 & a_{11} \, a_{12} & a_{11} \, a_{22} + a_{12}^2 & a_{12} \, a_{22} \\ 0 & a_{12}^2 & 2a_{22} \, a_{12} & a_{22}^2 \end{vmatrix} ,$$

si trova il determinante del secondo membro di (35).

Così si trovano anche i precedenti invarianti [legati da $(26)_{bis}$ se $W^2 = 1$]

$$S\xi^2 = - \Sigma \, h_{rspq} \, R_s \, R_s \, R_p \, R_q \; , \quad S\xi\xi' = - \Sigma \, h_{rspq} \, R_r \, R_s \, R'_p \, R'_q \, , \tag{37}$$

e analoga per $S\xi'^2$.

Siccome $W \neq 0$ per una congruenza non W, le x, x_s, x_{rs} ecc. formano sei sistemi linearmente indipendenti. Noi potremo scrivere sei quantità qualsiasi, p. es. le x_{rst}, y_{rst}, ecc. come combinazioni lineari di tali sistemi. E noi scriveremo

$$x_{rst} = b_{rst}\, x + \sum_{i,j} h_{rstj}\, A_{ji}\, x_i + \sum_{p,q,i,j} l_{rstpq}\, A_{pi}\, A_{qj}\, x_{ij} \tag{38}$$

(e analoghe in y, ...).

Moltiplicando (38) per x_p e sommando con le analoghe si trova $h_{rstp} = S x_p\, x_{rst}$. Perciò le h, che figurano in (38), coincidono con le h, da noi già definite precedentemente, e calcolate con le (34). Si noti che da (38) segue essere le b_{rst} simmetriche nei tre indici, le l_{rstpq} simmetriche sia nelle r, s, t, che nelle p, q.

Moltiplicando (38) per $-x$ e sommando con le analoghe, si trova:

$$0 = \sum_{p,q} l_{rstpq}\, A_{pq}\,. \tag{39}$$

Moltiplicando (38) per $-x_{pq}$ e sommando con le analoghe, si trova:

$$- S x_{pq}\, x_{rst} = b_{rst}\, a_{pq} + \sum_{\pi,\sigma,i,j} l_{rst\pi\sigma}\, A_{\pi i}\, A_{\sigma j}\, h_{ijpq}\,. \tag{39$_{bis}$}$$

I primi membri delle $(39)_{bis}$ *sono completamente determinati* dalle φ, Φ. Infatti derivando covariantemente le (33) si deducono tutte le $S x_{rs}\, x_{pqt} + S x_{pq}\, x_{rst}$; e [poichè per (31) $S x_{pq}\, x_{rst}$ è simmetrico sia negli indici p, q, che negli indici r, s, t], anche le $S x_{pq}\, x_{rst}$ sono *tutte* date in funzione delle derivate covarianti delle h, e perciò, per (34), sono note, quando sono date le φ, Φ. Date le φ, Φ, le (39) e $(39)_{bis}$ costituiscono un sistema di 4 equazioni lineari nelle quattro incognite b_{rst}, l_{rst11}, l_{rst12}, l_{rst22}, in cui il determinante dei coefficienti delle incognite è per $(35)_{bis}$ uguale a $W^2 = 1$. Le b, l si determinano anch'esse nel modo più semplice quando sono date le forme φ, Φ. *Date queste forme, è noto il sistema* (38) *di equazioni, che permette di risalire alla congruenza. Le condizioni di integrabilità di tali equazioni sono nel nostro caso l'analogo delle equazioni di Gauss-Codazzi.*

Osservazione. — Le precedenti ricerche si applicano alle congruenze W in quelle loro parti, che non presuppongono $W \neq 0$. Siano costruite per una tale congruenza le forme φ, Φ, che *non* potremo normare coi metodi precedenti. Se

$$A x_{11} + 2B x_{12} + C x_{22} + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x = 0 \tag{40}$$

(e analoghe in y, ...)

è l'equazione (scritta con derivate covarianti) cui soddisfano le coordinate di retta, allora moltiplicando (40) per x o per x_r, e sommando con le analoghe si trova

$$(41)\qquad \mathrm{A}a_{11} + 2\mathrm{B}a_{12} + \mathrm{C}a_{22} = 0$$

e $a_{r1}\alpha + a_{r2}\beta = 0$; donde, essendo $\varDelta \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$; cosicchè (40) è del tipo:

$$(40)_{bis}\qquad \mathrm{A}x_{11} + 2\mathrm{B}x_{12} + \mathrm{C}x_{22} + \gamma x = 0 .$$

Altre relazioni sono le $\mathrm{A}h_{11ij} + 2\mathrm{B}h_{12ij} + \mathrm{C}h_{22ij} = 0$ che si trovano, moltiplicando per x_{ij} e sommando con le analoghe. Si possono adottare a rigate u_1, u_2 o le sviluppabili della congruenza, o le caratteristiche di $(40)_{bis}$. In quest'ultimo caso $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$; perciò $a_{12} = 0$, $h_{12ij} = 0$; $\varphi = a_{11}\,du_1^2 + a_{22}\,du_2^2$; $\Phi = k_{1111}\,du_1^4 + k_{2222}\,du_2^4 - 2(21\,,21)\,du_1^2\,du_2^2$. Perciò Φ è del tipo $\chi\bar\chi + \frac{1}{2}\frac{(21\,,21)}{-a_{12}^2}\varphi^2$ (cfr. § 6. È $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\frac{(21\,,21)}{-a_{12}^2} = \frac{1}{2}$ curvatura di φ). Dare Φ equivale a dare la sola forma quadratica χ coniugata alla φ; la forma ψ del § 6 è nulla. La $(40)_{bis}$ in derivate ordinarie è poi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\,\partial u_2} - \frac{\partial \log\sqrt{a_{11}}}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\partial \log\sqrt{a_{22}}}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \gamma x = 0 .$$

Pare che per uno studio completo delle congruenze W (*anormali*) si debba esaminare anche la forma $\mathrm{S}\,d\xi^2$, ove le ξ siano definite dalle $\mathrm{S}\xi x = \mathrm{S}\xi x_r = \mathrm{S}\xi x_{rs} = 0$, cioè siano le coordinate del complesso osculatore.

Astronomia. — *Una pseudo-determinazione della costante d'aberrazione.* Nota I del Corrisp. V. Cerulli.

Insegna l'astronomia elementare che per dedurre da una serie di misure di latitudine di un dato luogo, prese tutte con la medesima stella, la costante f dell'aberrazione, o piuttosto la correzione $\varDelta f$ che ad un valore approssimato di detta costante si compete, bisogna risolvere un sistema di equazioni a 4 incognite, aventi per ciascuna misura la forma:

$$(1)\quad (\varDelta\varphi_0 - \varDelta\delta) - t\mu - b\cos(\odot + \mathrm{B})\,.\,\pi - b\sin(\odot + \mathrm{B})\,.\,\varDelta f = \varphi - (\varphi_0 + \varDelta\varphi)$$

dove indicano (¹):

φ e φ_0 risp. la latitudine misurata e la latitudine media;
$\varDelta\varphi$ la variazione di latitudine dovuta alla polodia;

(¹) Se le osservazioni abbracciano un periodo di tempo considerevole p. es. più di un decennio, la (1) va completata del termine di nutazione.