ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 maggio 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota II di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

4. Ricerche preliminari. — Prima di entrare nella ricerca dei criterî di equivalenza fra le equazioni differenziali ridotte e quelle di Euler-Poisson, è opportuno stabilire alcune interessanti premesse.

« *Se il giroscopio pesante è simmetrico, non è possibile determinare mediante le* (III) *il vettore* $\boldsymbol{\Omega}$, *anche supposte note le grandezze* S, T, U ».

Infatti, nel § 2 si è dimostrato che, per poter dedurre Ω dalla (5_a), che è una conseguenza delle (III), è necessario che sia soddisfatta la condizione (6); ora dimostro che, quando il giroscopio è simmetrico, non è possibile che la (6) sia soddisfatta. Invero, se Os è, ad es., l'asse di simmetria del giroscopio, il vettore $\mathbf{g}$ sarà parallelo ad Os; d'altra parte, l'omografia α d'inerzia ha in questo caso la forma [1]

$$\alpha = \mathrm{A} + aH(\mathbf{s}\,,\mathbf{s}) = \mathrm{A} + aH(\mathbf{g}\,,\mathbf{g})$$

[1] Cfr. O. Lazzarino, *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1917].

dove A, a sono quantità reali; quindi, con m numero reale, si può scrivere

$$\alpha \boldsymbol{\Omega} = \mathrm{A} \boldsymbol{\Omega} + a \, . \, \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \, . \, \mathbf{g} = \mathrm{A} \boldsymbol{\Omega} + m \mathbf{g}$$

e perciò si può concludere che, risultando il vettore $\alpha \boldsymbol{\Omega}$ complanare con $\mathbf{g}$ e con $\boldsymbol{\Omega}$, sarà $\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} = 0$ e quindi la (6) non può essere soddisfatta, c. d. d.

Esaminando ora la (V), si vede subito che, perchè il vettore $\mathbf{k}$ risulti finito e determinato, è necessario che sia diverso da zero il suo coefficiente, il che importa, essendo $2 \mathrm{U} \mathbf{g}^2 - \mathrm{S}^2 = (\mathbf{g} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega})^2$, che deve sussistere la condizione

$$(7) \qquad \mathbf{g} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} \neq 0 .$$

Questa condizione non è evidentemente verificata solo nei seguenti tre casi:

$$(8) \qquad \mathbf{g} = 0 \quad ; \quad \alpha \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad , \quad \alpha \boldsymbol{\Omega} = m \mathbf{g} \quad (m = \text{numero reale}).$$

Tenendo presente che $\mathbf{g} = \mathrm{G} - \mathrm{O}$, si vede che nel 1° caso, coincidendo il baricentro del giroscopio col punto fisso, si hanno *i moti alla Poinsot*. Nel 2° caso, invece, dalla (I) si ha $(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = m \mathbf{k}$, con m numero reale, il che significa che « il *baricentro G del sistema trovasi sulla verticale per il punto fisso* »; inoltre, essendo $\boldsymbol{\Omega} \times \alpha \boldsymbol{\Omega} = 2\mathrm{T} = 0$, risulta *nulla* la energia cinetica e quindi il *giroscopio deve essere in riposo*. Nel 3° caso, infine, il vettore $\alpha \boldsymbol{\Omega}$ dell'impulso, dovendosi mantenere parallelo al vettore $\mathrm{G} - \mathrm{O}$, avrà *direzione fissa nel corpo*; inoltre, risultando per la (IV_c) $\mathrm{U}' = 0$ e quindi $2\mathrm{U} = (\alpha \boldsymbol{\Omega})^2 =$ costante, il *vettore dell'impulso avrà pure costante la grandezza*. Questo terzo caso è particolarmente interessante e sarà dettagliatamente studiato in una prossima Nota. Intanto, osservando ancora che nei casi in cui non è soddisfatta la condizione (7) non può essere soddisfatta neppure la (6), si conclude che « *i giroscopi simmetrici, in generale, ed i giroscopi asimmetrici, nei casi particolari ora indicati, si sottraggono all'indagine fatta per mezzo delle equazioni differenziali ridotte* ».

Si può ancora dimostrare che « *se due qualunque degli invarianti S, T, U sono costanti, cioè indipendenti dal tempo, sarà necessariamente costante anche il rimanente* ». Infatti, se due qualunque degli invarianti S, T, U sono costanti, saranno nulle le corrispondenti derivate rispetto al tempo e dalle (IV) risulta immediatamente che, per qualunque combinazione, il vettore $\mathbf{g}$ è sempre complanare con i vettori $\boldsymbol{\Omega}$, $\alpha \boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{k}$. Da ciò segue che dovrà essere necessariamente nulla la rimanente derivata e quindi costante l'invariante corrispondente, c. d. d.

Dimostro infine che « *se tutti e tre gl'invarianti S, T, U sono costanti, il moto del giroscopio si ridurrà ad una rotazione permanente* ». Basta osservare che, per le fatte ipotesi, l'energia cinetica e il modulo del vettore impulso sono *costanti*, cioè indipendenti dal tempo, e che, come è facile vedere, l'asse istantaneo di rotazione appartiene costantemente al cono di Staude (cono degli assi permanenti di rotazione).

Si ha infatti che dall'ipotesi $S = \text{cost}$ segue l'equazione

$$S' = \mathbf{g} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0 \tag{9}$$

e questa rappresenta precisamente il *cono di Staude*, cioè un cono quadratico di cui ogni generatrice è un asse permanente di rotazione. Ciò risulta chiaro osservando che dalla (I'), quando il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ è costante, si ha

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{g}$$

e questa equazione, moltiplicata scalarmente per $\mathbf{g}$, dà precisamente la (9).

5. Ricerca dei criterii di equivalenza fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson. — Per poter applicare con sicurezza le equazioni di Hess-Schiff, in luogo di quelle di Euler-Poisson, è evidentemente necessario stabilire se e quando i detti due sistemi di equazioni differenziali siano tra loro equivalenti. Poichè nel paragrafo precedente si è dimostrata l'esistenza di casi che sfuggono all'indagine fatta per mezzo delle equazioni di Hess-Schiff, è chiaro che, pur essendo queste equazioni una conseguenza di quelle di Euler-Poisson, non si può ammettere *a priori* che sussista sempre la reciproca, come fu da qualche A. erroneamente ammesso.

Per stabilire quindi, nel modo più generale, i criterî di equivalenza fra i due detti sistemi, occorre esaminare se e quando sia possibile dedurre, come conseguenza delle equazioni di Hess-Schiff, quelle di Euler-Poisson. Quando, e solo quando, tale possibilità sussiste, queste ultime equazioni saranno soddisfatte da tutti i valori dei vettori $\boldsymbol{\Omega}$ e $\mathbf{k}$ ottenuti mediante la integrazione delle equazioni differenziali ridotte e si può esser sicuri di ottenere effettivamente i moti del giroscopio considerato.

Posto, per comodità di scrittura,

$$\alpha \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\Omega} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{g} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{a} \tag{10}$$

si dimostra anzitutto che dalle (V) e (VI) è possibile dedurre il sistema di equazioni

$$\mathbf{g} \times \mathbf{a} = 0 \quad ; \quad \alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} = 0 . \tag{11}$$

Infatti, per ottenere la 1ª delle (11), si osserva che, per la (IV_a), la (VI_a) può scriversi

$$S' = \mathbf{g} \times \alpha \boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{g} \times \alpha \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

e da qui, tenendo poi conto della (10), si ottiene

$$\mathbf{g} \times (\alpha \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\Omega} \wedge \alpha \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{g} \times \mathbf{a} = 0 .$$

Per dedurre la 2ª delle (11), si moltiplica scalarmente la (V) per il vettore $g \wedge \alpha\Omega$ e si ottiene, tenendo presente che è $2Ug^2 - S^2 = (g \wedge \alpha\Omega)^2$, la relazione

$$k \times g \wedge \alpha\Omega = U'.$$

Osservando ora che, per la (IV_c), è anche

$$k \times g \wedge \alpha\Omega = \alpha\Omega \times \alpha\Omega'$$

si ricava, tenendo anche conto della (10),

$$\alpha\Omega \times [\alpha\Omega' + g \wedge k] = \alpha\Omega \times a = 0.$$

Per ottenere, infine, la 3ª delle (11), si moltiplica la (V) scalarmente per $g \wedge \Omega$ e si ha

$$(g \wedge \alpha\Omega)^2 . k \times g \wedge \Omega =$$
$$= [-(h - T) S + kg^2] . \alpha\Omega \times g \wedge \Omega + (g \wedge \alpha\Omega) \times (g \wedge \Omega) . U'$$

e da qui, sviluppando l'ultimo termine e tenendo conto della (VI_a) e delle (III), si ricava

$$(g \wedge \alpha\Omega)^2 . k \times g \wedge \Omega = [(h - T) S - kg^2] S' + [2Tg^2 - S . g \times \Omega] U'.$$

Ora, per la (VI_b), il 2° membro di questa equazione è uguale a $(g \wedge \alpha\Omega)^2 T'$, quindi, tenendo anche conto della (IV_b), si ottiene

$$k \times g \wedge \Omega = T' = \Omega \times \alpha\Omega'$$

e da qui, tenendo poi conto anche della (10), si ha

$$\Omega \times (\alpha\Omega' + g \wedge k) = \Omega \times a = 0.$$

Dopo aver dimostrato così che il sistema (11) è una conseguenza delle equazioni differenziali ridotte, si osserva che le (11) sono evidentemente verificate se è

$$a = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega + g \wedge k = 0, \tag{12}$$

mentre, per $a \neq 0$, esprimono che i vettori g, $\alpha\Omega$, Ω sono normali al vettore a e quindi tra loro complanari; perciò deve essere, per $a \neq 0$,

$$S' = g \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0. \tag{13}$$

Poichè in nessun altro caso le (11) possono essere soddisfatte e poichè la (12) esprime che sussistono le equazioni di Euler, mentre la (13) importa che deve essere $S = g \times \alpha\Omega =$ costante, si conclude che « *per poter dedurre, come conseguenza, dalle equazioni differenziali ridotte quelle di Euler, basta che l'invariante principale* S *sia funzione del tempo* ».

Con un procedimento analogo si può esaminare se e quando l'equazione (II) possa dedursi, come conseguenza, dalle (V) e (VI). Si consideri il sistema

$$(14) \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k}' = 0 \quad ; \quad \mathbf{g} \times \mathbf{k}' = 0 \quad ; \quad \alpha\Omega \times \mathbf{k}' + \mathbf{a} \times \mathbf{k} = 0$$

dove $\mathbf{a}$ è il vettore definito dalla (10); si dimostra che le (14) possono dedursi, come conseguenza, dalle (V) e (VI).

Infatti, per ricavare la 1ª delle (14) si moltiplica la (V) scalarmente per $\mathbf{k}$ e, tenendo conto delle (2), (3) e (IV_c), si ottiene

$$(2\mathrm{U}\,\mathbf{g}^2 - \mathrm{S}^2)\,\mathbf{k}^2 = 2\mathrm{U}\,(h - \mathrm{T})^2 - 2\,k\,\mathrm{S}\,(h - \mathrm{T}) + k^2\,\mathbf{g}^2 + \mathrm{U}'^2$$

e da qui, tenendo conto dell'espressione (VI_c) di U', si deduce che deve essere $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1$ da cui, derivando rispetto al tempo, si ha $\mathbf{k} \times \mathbf{k}' = 0$ c. d. d.

Per dedurre poi la 2ª delle (14), si moltiplica scalarmente la (V) per $\mathbf{g}$ e, tenendo presenti le (III), si ottiene subito

$$\mathbf{k} \times \mathbf{g} = h - \mathrm{T}\,,$$

si ha cioè l'integrale delle forze vive, dal quale, derivando, si ricava

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{g} + \mathbf{k} \times \Omega \wedge \mathbf{g} = - \mathrm{T}'\,.$$

Osservando che, per la (IV_b), è $\mathbf{g} \times \mathbf{k} \wedge \Omega = - \mathrm{T}'$, si deduce che deve essere

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{g} = 0\,.$$

Finalmente, per ricavare la 3ª delle (14), si osserva che può scriversi

$$\alpha\Omega \times \mathbf{k}' + \mathbf{a} \times \mathbf{k} = \alpha\Omega \times \mathbf{k}' + (\alpha\Omega)' \times \mathbf{k} = (\alpha\Omega \times \mathbf{k})'\,;$$

ma dalla (V), moltiplicata scalarmente per $\alpha\Omega$, si ha

$$\alpha\Omega \times \mathbf{k} = k$$

dove k è la costante dell'integrale delle aree, quindi si conclude che deve essere

$$\alpha\Omega \times \mathbf{k}' + \mathbf{a} \times \mathbf{k} = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Supponendo ora che l'invariante S sia funzione del tempo, risulta $\mathbf{a} = 0$ e quindi la precedente equazione si riduce ad $\alpha\Omega \times \mathbf{k}' = 0$ e le (14) si scrivono

$$(14') \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k}' = 0 \quad ; \quad \mathbf{g} \times \mathbf{k}' = 0 \quad ; \quad \alpha\Omega \times \mathbf{k}' = 0\,.$$

Queste equazioni sono evidentemente soddisfatte se è

$$(\mathrm{II}) \qquad \mathbf{k}' = 0$$

mentre, per $k' \neq 0$, esprimono che i vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{g}$, $\alpha\Omega$ devono essere complanari, cioè

$$U' = \mathbf{k} \times \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega = 0 . \tag{15}$$

Osservando che in nessun altro caso le (14′) possono essere soddisfatte e che la (15) importa che deve essere $2U = (\alpha\Omega)^2 =$ costante, si conclude che « *quando non sono costanti nè l'invariante S, nè l'invariante U, allora* « *le equazioni di Euler-Poisson sono una conseguenza delle equazioni di* « *Hess-Schiff* ». Da ciò segue che « *per l'equivalenza fra i sistemi di* « *Hess-Schiff e di Euler-Poisson basta che gl'invarianti principali S e U* « *siano funzioni del tempo* ».

Se, invece, entrambi i detti invarianti non dipendono dal tempo, la equivalenza non sussiste e, secondo quanto è stato dimostrato nel paragrafo precedente, sarà indipendente dal tempo anche T e il giroscopio eseguirà delle *rotazioni permanenti.*

Se poi è costante uno soltanto degli invarianti S e U, allora si hanno due casi eccezionali che saranno esaminati in una Nota prossima. Pertanto risulta chiaro che la presente ricerca, condotta con metodo rapido e semplice, oltre a stabilire nel modo più generale i *criteri di equivalenza* fra i detti sistemi di equazioni differenziali, dimostra *l'esistenza dei due casi eccezionali* $S =$ *costante*, $U =$ *costante.*

L'aver ammessa come intuitiva tale equivalenza condusse Hess [1], nel caso $U =$ *cost.*, a risultati erronei, riconosciuti tali dallo stesso Hess [2], il quale volle trovarne la spiegazione nel fatto che, mentre $U =$ *cost.* è una soluzione singolare delle equazioni di Hess-Schiff, la forma delle equazioni di Euler-Poisson non ammette soluzioni singolari.

La superiorità del metodo dell'equivalenza su quello delle soluzioni singolari, impostato dall'Hess, risulta senz'altro dal fatto che, mentre il primo permette di dimostrare con estrema semplicità la *non identità* dei due sistemi di equazioni differenziali e l'*esistenza* dei due casi eccezionali, il secondo, invece, mediante calcoli enormemente più complicati, conduce a tutta una serie di possibilità che poi, in ultima analisi, si riducono ai due casi qui trovati.

(1) Ved. loc. cit., nota (1).

(2) Hess, *Ueber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und ihre singulären Lösungen* [Programm des Lyceums zu Bamberg (a. 1889)]. — *Ueber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt* [Mathem. Annalen, Bd. 37, pp. 153-181, a. 1890].