ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

5. La formula che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g'_m è quella appunto da cui Castelnuovo ha dedotto un criterio perchè una g_m^s sia contenuta in una g_n^r speciale, criterio che conduce immediatamente al teorema di Riemann-Roch. L'idea fondamentale consiste nell'osservare che l'espressione indicata dalla detta formula non può diventare negativa per due serie g_n^r e g'_m che non abbiano infiniti G_{r+1} comuni. E l'osservazione resta ugualmente giustificata rispetto al nostro metodo di deduzione della formula, come per quello adoperato dal Segre o dal Castelnuovo.

Nelle lezioni di Geometria sopra le curve algebriche, che ho tenuto quest'anno all'Università di Bologna, accanto allo sviluppo della teoria secondo il metodo di Brill e Noether, ho spiegato anche quello che si basa sul metodo accennato, traducendo i ragionamenti iperspaziali in linguaggio invariantivo e semplificandoli in qualche punto. I due sviluppi troveranno posto ugualmente nel terzo volume del mio trattato sulla *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, a cui sto attendendo con la collaborazione del dott. Chisini.

Balistica. — *Alcune osservazioni sui problemi della balistica esterna.* Nota del Corrisp. Guido Fubini.

Mi sia permesso ritornare brevemente su alcune mie vecchie Note (¹) a proposito di una recente pubblicazione (²). Con le seguenti righe io non inizio però una polemica, che, per parte mia, ritengo chiusa con questa Nota. Io mantengo integralmente tutte le considerazioni dei miei lavori citati.

(¹) *Alcune formole di balistica* ecc. (questi Rendiconti, 4 febbraio 1917). *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto* (ibidem, 18 febbraio 1917). Citerò queste Note rispettivamente con (A) o con (B).

Il prof. Terracini però mi comunica che nel problema, cui si riferisce la Nota A, non sempre è lecito trascurare le variazioni si densità dell'aria e che perciò sarebbe opportuno aggiungere nella formola trovata il termine corrispondente a tale variazione.

(²) E. Cavalli, *Contributi necessarii al progresso della balistica* (Rivista di artiglieria e genio, vol. I, 1919). Citerò con (C) questo lavoro. Esso contiene anche una filza di attacchi non alle mie formole, ma al loro autore. Non me ne occupo sia perchè non interessano per niente me, e ancor meno il lettore, sia perchè affatto estranei alla invocata serenità della discussione scientifica. Non mi occupo neanche di altri punti di nessuna importanza, per cui lascio senz'altro giudice il lettore: p. es. che *Charbonnier*, e quindi io, chiamiamo impropriamente problema di Eulero il problema relativo al caso che la resistenza dell'aria sia proporzionale alla n^{esima} potenza della velocità. Secondo il C. Eulero si sarebbe *soltanto* occupato del caso $n=2$! Veramente secondo il (C) io non conoscerei poi neanche l'esistenza di uno Charbonnier!!

1. In (C) si dubita dell'esattezza di una mia formola; perciò la si verifica e la si trova giusta nei casi a cui il (C) ha limitato il suo studio. I dubbii sollevati per le mie due dimostrazioni (seguite più tardi da una terza dovuta al prof. Picone) appariscono subito infondati a chi applichi la regola per derivare un integrale definito rispetto ad un parametro, oppure a chi conosca il fatto elementare che, se ci accontentiamo di formole coi differenziali *primi*, una curva si può, nell'interno di un suo punto, identificare con la corrispondente retta tangente.

2. Pur riconoscendo qualche valore scientifico a tale formola, si afferma in (C) che il mio risultato non risolve alcun problema pratico per chi adoperi le tavole di tiro *in uso*. Ciò è inesatto. La mia Nota ebbe invece proprio origine dal seguente problema (propostomi da un ufficiale combattente) e lo risolse: « Si possiede una tavola di tiro *usuale* (a carica fissa) per un cannone di cui, per ragioni tecniche locali, non si poteva variare l'angolo di elevazione. Si domanda quale correzione si deve apportare alla *carica* per raggiungere il bersaglio ».

3. Si dice in (C) che nella mia Nota (A) non si risolve il problema della correzione del tiro, così come è posto usualmente. In (A), come dico esplicitamente, mi occupo del solo caso realmente difficile, perchè la risoluzione del problema usuale non è, come si afferma in (C), una *creazione*, che meriti la gratitudine di tutti gli studiosi, ma si ottiene coi metodi più elementari [1] in parecchi modi.

4. In (C) si osserva che, citando in (A) precedenti lavori, dico per svista che ivi si suppone $n = \frac{1}{2}$, mentre in realtà si suppone $n = -\frac{1}{2}$. La mia critica ne resta affatto immutata perchè si riferisce ad un *qualsiasi* valore di n; e la formola relativa viene in ogni caso da me dichiarata inaccettabile *per un teorico*, perchè ottenuta con metodi matematicamente non soddisfacenti.

5. In (C) pare si derida la proposta di tener conto nella costruzione di tavole per il tiro in montagna del dislivello tra arma e bersaglio. Benissimo: così, anche quando esso non è una piccolissima frazione della gittata, si continuerà a considerarlo infinitesimo. In (C) si afferma che gli Americani (i quali probabilmente non avevano mai pensato all'impiego di grossi calibri in alta montagna) fanno ancora *peggio*. Quand'è così,... *America locuta est; causa finita est.*

[1] Infatti, conoscendo dalle *usuali* tavole di tiro la gittata e l'angolo di caduta, si conosce l'estremo arco della traiettoria (sostituendogli, se si tratta di una formola di correzione ai differenziali *primi*, la tangente nel punto di caduta, o, se si vuole una maggior precisione e tener conto della velocità di caduta, sostituendogli un arco di una conveniente parabola tangente, oppure di altra curva, che si può scegliere in modo molteplice, così da raggiungere l'approssimazione che si desidera). È allora cosa immediata il dedurne la correzione da farsi all'angolo iniziale per tener conto dello spostamento del bersaglio in direzione verticale, od anche in una direzione qualsiasi.

6. In (C) si afferma che in (B) io uso, come di novità, delle serie di Taylor, di cui illustri studiosi avevano già osservata la inapplicabilità, perchè conduce a serie divergenti. Non è così. In (B) io affermo soltanto che l'applicazione numerica da me fatta per un tipo *particolare* di proietto (al cui calcolo ho dedicato allora lungo tempo) mi avevano provato in quel caso *speciale* la applicabilità della formola di Taylor-Lagrange (che in (C) si confonde con la serie di Taylor).

7. In (C) si lamenta che io non abbia anche dato metodi e tabelle di calcolo numerico, come avevo promesso nella Nota (B). Io non pubblicai tali calcoli soltanto perchè mi si fece osservare la inopportunità di tale pubblicazione in quel momento (gennaio 1917).

8. Le obbiezioni rivolte in (C) per ciò che riguarda le confusioni tra i varii β e le applicazioni numeriche, non sono rivolte al mio scritto, ma al metodo seguito dal critico per applicare i miei risultati. Le classiche formole del Siacci sono, com'è ben noto, le formole *del tiro teso*. Ciononostante *qualcuno* (che credo ben noto al mio critico) ha calcolato il β *teorico* di Siacci per tutti gli angoli del primo quadrante! Nella Nota (B) ho cercato di modificarle in modo da renderle più approssimate per il calcolo di archi lunghi di traiettorie, o per il caso di angoli di proiezione non troppo piccoli. Lasciando altri metodi di seconda approssimazione (perchè non si può prevedere facilmente il grado di approssimazione raggiunta), metodi, che per comodità di polemica, il critico afferma a me ignoti, io scrivo delle formole contenenti due nuovi parametri a, b, le quali, per valori particolari di questi, si riducono alle formole del Siacci. Si tratta pertanto solamente di determinare le *variazioni* da darsi a questi parametri in modo da rappresentare, nel modo migliore possibile, una delle traiettorie cercate, per servirsene poi nel calcolo delle traiettorie vicine. Siamo perciò ridotti allo studio di equazioni alle *variazioni*, e perciò lineari, studio che non presenta difficoltà. Chè, se per tal via non si raggiungesse talvolta lo scopo, ciò vorrebbe dire soltanto che le formole del Siacci non rappresenterebbero in quel caso neanche in prima approssimazione le traiettorie studiate; e sarebbe naturalmente vano continuare con un metodo, a cui mancherebbe, e non per colpa sua, il punto di partenza. Del resto in qualche caso si possono anche evitare le equazioni alle variazioni, pure ottenendo calcoli molto semplici. Se p. es. si suppone nullo il parametro a, tutte le formole assumono l'aspetto consueto, si possono perfino usare le *solite* tavole dei fattori di tiro [1]; si può perfino ammettere il β costante lungo una

[1] Il caso $a=0$, che è specialmente importante, si trova già studiato da altri (però con particolari valori dell'altro parametro) in Note da me citate: Note che io conobbi durante la lettura fatta, per debito di studioso, di tutte le Memorie di balistica, che potei procurarmi. Stampando la mia Nota, aggiungevo che la pubblicavo soltanto perchè le

stessa verticale, compensando l'errore così commesso con opportune variazioni dell'altro parametro. E se, per le ragioni su esposte, non si può applicare questo metodo di seconda approssimazione, non resta che da applicare uno dei metodi che l'analisi offre per l'integrazione approssimata di una equazione alle derivate ordinarie: p. es. usare la tabella del Siacci per la funzione ritardatrice, sostituendo all'equazione dell'odografa una equazione alle differenze finite, oppure applicare il metodo da me ricordato, a cui Cranz ricorse per calcoli numerici: per notizie in proposito, che il critico mi chiede, si cfr. nell'*Encyclopédie des Sciences Mathém.* (tomo 4, vol. 6, fasc. 1), l'articolo di Cranz ed E. Vallier.

Matematica. — *Generalizzazione di un teorema del signor Humbert.* Nota della sig.na dott.a Concetta Raciti, presentata dal Socio Castelnuovo.

Uno dei più notevoli contributi del sig. Humbert alla teoria delle superficie iperellittiche consiste nell'aver caratterizzato la struttura del gruppo costituito dalle trasformazioni birazionali di una superficie iperellittica in se stessa, nell'ipotesi che questa superficie sia *pura* (cioè appartenga a una matrice riemanniana pura) e abbia l'indice di moltiplicabilità eguale a 1 (1); nel qual caso, per un teorema dovuto pure al sig. Humbert (2), anche l'indice di singolarità della superficie è uguale a 1.

Qui vogliamo far vedere come un ragionamento semplicissimo conduca con molta spontaneità a un teorema che generalizza notevolmente la parte essenziale della ricerca dello Humbert ora ricordata.

Sia V_p una varietà abeliana *pura* della dimensione p con gli indici di singolarità e moltiplicabilità eguali entrambi a 1.

Allora la matrice riemanniana cui appartiene V_p essendo pura e semplicemente singolare, è di genere necessariamente pari, e, posto $p = 2q$,

---

mie formole erano più generali, e concepite in modo nuovo: quello di non prefissare *a priori* i valori dei parametri, ma di scegliere caso per caso quelli che il calcolo troverebbe più convenienti. Pare che questa idea non vada a genio al mio critico, e forse anche che neppure la mia citazione di lavori altrui lo soddisfi!

(1) G. Humbert, *Sur les functions abéliennes singulières* [Journal de Mathématiques pure et appliquées, 5me série, t. VI (1900), pp. 279-386], pag. 313 e segg.

(2) Loc. cit. (1), pag. 330. Avvertasi che per tutto quanto si riferisce alla teoria delle matrici riemanniane intendiamo che si tenga presente la Memoria del sig. Scorza contenuta nel t. XLI dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Memoria che quando occorrerà citarla indicheremo semplicemente con M.