ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

stessa verticale, compensando l'errore così commesso con opportune variazioni dell'altro parametro. E se, per le ragioni su esposte, non si può applicare questo metodo di seconda approssimazione, non resta che da applicare uno dei metodi che l'analisi offre per l'integrazione approssimata di una equazione alle derivate ordinarie: p. es. usare la tabella del Siacci per la funzione ritardatrice, sostituendo all'equazione dell'odografa una equazione alle differenze finite, oppure applicare il metodo da me ricordato, a cui Cranz ricorse per calcoli numerici: per notizie in proposito, che il critico mi chiede, si cfr. nell'*Encyclopédie des Sciences Mathém.* (tomo 4, vol. 6, fasc. 1), l'articolo di Cranz ed E. Vallier.

Matematica. — *Generalizzazione di un teorema del signor Humbert.* Nota della sig.^{na} dott.^{a} CONCETTA RACITI, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

Uno dei più notevoli contributi del sig. Humbert alla teoria delle superficie iperellittiche consiste nell'aver caratterizzato la struttura del gruppo costituito dalle trasformazioni birazionali di una superficie iperellittica in se stessa, nell'ipotesi che questa superficie sia *pura* (cioè appartenga a una matrice riemanniana pura) e abbia l'indice di moltiplicabilità eguale a 1 (1); nel qual caso, per un teorema dovuto pure al sig. Humbert (2), anche l'indice di singolarità della superficie è uguale a 1.

Qui vogliamo far vedere come un ragionamento semplicissimo conduca con molta spontaneità a un teorema che generalizza notevolmente la parte essenziale della ricerca dello Humbert ora ricordata.

Sia V_p una varietà abeliana *pura* della dimensione p con gli indici di singolarità e moltiplicabilità eguali entrambi a 1.

Allora la matrice riemanniana cui appartiene V_p essendo pura e semplicemente singolare, è di genere necessariamente pari, e, posto $p = 2q$,

---

mie formole erano più generali, e concepite in modo nuovo: quello di non prefissare *a priori* i valori dei parametri, ma di scegliere caso per caso quelli che il calcolo troverebbe più convenienti. Pare che questa idea non vada a genio al mio critico, e forse anche che neppure la mia citazione di lavori altrui lo soddisfi!

(1) G. Humbert, *Sur les functions abeliennes singulières* [Journal de Mathématiques pure et appliquées, 5^{me} série, t. VI (1900), pp. 279-386], pag. 313 e segg.

(2) Loc. cit. (1), pag. 330. Avvertasi che per tutto quanto si riferisce alla teoria delle matrici riemanniane intendiamo che si tenga presente la Memoria del sig. Scorza contenuta nel t. XLI dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Memoria che quando occorrerà citarla indicheremo semplicemente con M.

ammette due sistemi nulli reali degeneri aventi per assi due S_{q-1} indipendenti, che risultano due pseudo-assi della matrice [1].

Diciamo α e α' questi due pseudo-assi.

Poichè i sistemi nulli della matrice formano per ipotesi un fascio, questo fascio sarà quello determinato dai sistemi nulli degeneri che hanno per assi α e α'.

Allora un punto di α o di α', avendo per iperpiano polare rispetto all'uno o all'altro di questi sistemi nulli un iperpiano indeterminato, avrà rispetto a ciascun altro sistema nullo del fascio lo stesso iperpiano polare che ha rispetto ad uno generico di essi.

Adesso tra le omografie della matrice, che, per ipotesi, formano fascio e possono ottenersi tutte moltiplicando i sistemi nulli della matrice per la inversa di uno qualunque di essi che non sia degenere [2], consideriamo quelle riemanniane e consideriamo inoltre le sostituzioni riemanniane della matrice ad esse corrispondenti.

Se, fra queste, due formanti base minima [3] sono le sostituzioni coi moduli

$$|a'_{rs}| \quad \text{e} \quad |a''_{rs}| \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,\ldots 2p),$$

tutte le altre sostituzioni riemanniane avranno per moduli quelli dati da

$$|\mu' a'_{rs} + \mu'' a''_{rs}| \tag{1}$$

al variare degli interi μ' e μ''.

Naturalmente se nel determinante (1) si lasciano variare μ' e μ'' non soltanto per valori interi, ma per valori (reali o imaginarî) qualunque si otterranno da esso i moduli di tutte le omografie della matrice (riemanniane o no).

L'equazione caratteristica dell'omografia col modulo (1) è

$$|\mu' a'_{rs} + \mu'' a''_{rs} - \varepsilon_{rs}\, x| = 0 \tag{2}$$

dove ε_{rs} è 1 o 0 secondo che è $r = s$ oppure $r \neq s$.

Poichè questa omografia, se μ' e μ'' sono generici (interi o no) ha, per le osservazioni fatte più sopra, due soli spazî *fondamentali* [4] in α e α', indipendenti e della dimensione $2q - 1 = p - 1$, la sua equazione caratteristica che è del grado $2p$, deve avere due radici distinte soltanto, multiple l'una e l'altra secondo p; quindi il primo membro della (2) deve

(1) M., Parte I, n. 81.

(2) M. Parte I, n. 13.

(3) M., Parte I, n. 20.

(4) Gli spazî *fondamentali* di una omografia sono, come è noto, gli spazî riempiti dai loro punti uniti.

essere la potenza p^{esima} di un binomio di 2° grado in x della forma

$$x^2 + Ax + B$$

dove A e B sono funzioni razionali intere di μ' e μ'', con coefficienti razionali, anzi, per un noto teorema di Gauss (1), con coefficienti interi.

Poniamo pertanto

$$B = C\mu'^2 + D\mu'\mu'' + E\mu''^2$$

con C, D, E interi.

Dall'identità

$$|\mu' a'_{rs} + \mu'' a''_{rs} - \varepsilon_{rs} x| = (x^2 + Ax + B)^p$$

segue, per $x = 0$,

$$|\mu' a'_{rs} + \mu'' a''_{rs}| = B^p = (C\mu'^2 + D\mu'\mu'' + E\mu''^2)^{2q}.$$

Di qua risulta:

α) che tra le sostituzioni riemanniane della nostra matrice sono modulari tutte e sole quelle rispondenti ai valori interi di μ' e μ'' che soddisfanno all'equazione

(3) $$C\mu'^2 + D\mu'\mu'' + E\mu''^2 = \pm 1 ;$$

β) che le due omografie della matrice degeneri (ma non nulle) sono quelle rispondenti ai valori di μ' e μ'' per cui è

(4) $$C\mu'^2 + D\mu'\mu'' + E\mu''^2 = 0.$$

Poichè di tali omografie degeneri ne esistono appunto due, *reali*, distinte, ma *non* razionali, perchè gli spazî α e α' sono due *pseudo-assi* e non due assi della matrice, nella (4) è

$$D^2 - 4CE$$

positivo e non quadrato perfetto.

Segue che le (3) considerate come due equazioni indeterminate di 2° grado in μ' e μ'', sono equazioni di tipo *iperbolico* a discriminante *non* quadrato, per modo che appena una di esse ammette una soluzione con numeri interi ne ammette addirittura infinite (2).

Ma una di esse, almeno, qualche soluzione sì fatta la possiede certo, perchè di sostituzioni riemanniane modulari la nostra matrice, come ogni

(1) Cfr., per esempio, Cipolla, *Analisi algebrica ed introduzione al calcolo infinitesimale* (Palermo, Capozzi, 1914), pag. 401.

(2) Vedi, per es., Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, art. 216 e 217.

altra matrice riemanniana, ne ammette almeno due (quella identica e l'opposta); dunque almeno una delle (3) ammette infinite soluzioni intere, e la nostra matrice possiede infinite sostituzioni riemanniane modulari.

Di qua segue che la varietà V_p ammette una infinità discontinua di schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in se stessa [1]; dunque possiamo enunciare il teorema:

Se una varietà abeliana della dimensione p è pura ed ha gli indici di singolarità e moltiplicabilità eguali entrambi a 1, p è necessariamente pari e la varietà ammette una infinità discontinua di schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in se stessa.

Geometria. — *A proposito di un teorema del Lie.* Nota I di NICOLÒ SPAMPINATO, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

Il Brambilla, estendendo un ben noto teorema del Lie sulla superficie di Steiner, dimostrò nel 1899 che:

Il luogo dei poli di un iperpiano rispetto alle coniche di una superficie di Veronese è ancora, in generale, una superficie di Veronese.

Studiando la geometria delle cubiche di un piano, per la tesi di laurea da presentare nel prossimo giugno alla Facoltà matematica della R. Università di Catania, mi è venuto fatto di osservare che del teorema del Lie può darsi una estensione assai più vasta di quella osservata dal Brambilla, in quanto che invece di fissare l'attenzione sopra una superficie di Veronese può prendersi a considerare la superficie razionale normale dell'ordine n^2 dello S_N, con $N=\dfrac{n(n+3)}{2}$, rappresentata sopra un piano dal sistema lineare ∞^N di tutte le curve di ordine n, e contenente una rete omaloidica $|L|$ di curve razionali normali di ordine n.

È noto infatti (Clifford) che, data una curva razionale normale, esiste, nello spazio a cui essa appartiene, una ed una sola reciprocità involutoria nella quale ad ogni punto della curva corrisponde l'iperpiano ivi osculatore alla curva, tale reciprocità involutoria risultando una polarità od un sistema nullo secondo che l'ordine della curva è pari o dispari.

Ma allora, fissato nello S_N, contenente la nostra superficie, un iperpiano, e detto *polo* di questo rispetto ad una curva L il polo della traccia dell'iperpiano sullo S_n contenente L rispetto alla reciprocità di Clifford determinata da L, possiamo domandarci *quale sia il luogo dei poli dell'iperpiano rispetto alle ∞^2 curve* L.

[1] M., Parte II, n.° 2.