ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

altra matrice riemanniana, ne ammette almeno due (quella identica e l'opposta); dunque almeno una delle (3) ammette infinite soluzioni intere, e la nostra matrice possiede infinite sostituzioni riemanniane modulari.

Di qua segue che la varietà V_p ammette una infinità discontinua di schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in se stessa ([1]); dunque possiamo enunciare il teorema:

Se una varietà abeliana della dimensione p è pura ed ha gli indici di singolarità e moltiplicabilità eguali entrambi a 1, p è necessariamente pari e la varietà ammette una infinità discontinua di schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in se stessa.

Geometria. — *A proposito di un teorema del Lie.* Nota I di Nicolò Spampinato, presentata dal Socio Castelnuovo.

Il Brambilla, estendendo un ben noto teorema del Lie sulla superficie di Steiner, dimostrò nel 1899 che:

Il luogo dei poli di un iperpiano rispetto alle coniche di una superficie di Veronese è ancora, in generale, una superficie di Veronese.

Studiando la geometria delle cubiche di un piano, per la tesi di laurea da presentare nel prossimo giugno alla Facoltà matematica della R. Università di Catania, mi è venuto fatto dl osservare che del teorema del Lie può darsi una estensione assai più vasta di quella osservata dal Brambilla, in quanto che invece di fissare l'attenzione sopra una superficie di Veronese può prendersi a considerare la superficie razionale normale dell'ordine n^2 dello S_N, con $N = \frac{n(n+3)}{2}$, rappresentata sopra un piano dal sistema lineare ∞^N di tutte le curve di ordine n, e contenente una rete omaloidica $|L|$ di curve razionali normali di ordine n.

È noto infatti (Clifford) che, data una curva razionale normale, esiste, nello spazio a cui essa appartiene, una ed una sola reciprocità involutoria nella quale ad ogni punto della curva corrisponde l'iperpiano ivi osculatore alla curva, tale reciprocità involutoria risultando una polarità od un sistema nullo secondo che l'ordine della curva è pari o dispari.

Ma allora, fissato nello S_N, contenente la nostra superficie, un iperpiano, e detto *polo* di questo rispetto ad una curva L il polo della traccia dell'iperpiano sullo S_n contenente L rispetto alla reciprocità di Clifford determinata da L, possiamo domandarci *quale sia il luogo dei poli dell'iperpiano rispetto alle ∞^2 curve* L.

([1]) M., Parte II, n.° 2.

Ebbene qui vogliamo dimostrare che:

Il luogo richiesto è una superficie (razionale) dell'ordine n^2, *con una rete omaloidica di curve d'ordine* n, *immersa in uno spazio avente al più la dimensione* N, N — 1 *o* N — 2 *secondo che l'intero* n *è della forma*

$$2k\ ,\ 4k+1\ \text{ o }\ 4k+3\ ,$$

con k *intero.*

Nel caso in cui sia $n=3$ il teorema ora enunciato si collega con una elegante proprietà del fascio sizigetico di cubiche piane.

Essa consiste nel fatto che:

Ogni retta del piano di un fascio sizigetico di cubiche taglia le cubiche del fascio in una involuzione autoassociata, cioè in terne di punti a due a due coniugate.

1. Cominciamo col risolvere il seguente problema:

In un piano sono date due curve d'ordine n C_1 e C_2 rappresentate dalle equazioni:

$$\sum_{i_1\ldots i_n}^{1,2,3} a_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}\ldots x_{i_n}=0$$

$$\sum_{j_1\ldots j_n}^{1,2,3} b_{j_1\ldots j_n} x_{j_1}\ldots x_{j_n}=0$$

(col solito significato dei sommatori e le solite convenzioni sui coefficienti $a_{i_1\ldots i_n}$, $b_{j_1\ldots j_n}$): trovare l'equazione dell'inviluppo K delle rette che le secano in gruppi di punti coniugati.

Si considerino nel piano due punti A e B colle coordinate $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ e siano

$$\lambda_1 x_i^{(1)}+\lambda_2 x_i^{(2)} \tag{1}$$

le coordinate del punto scorrente sulla retta AB.

Le equazioni dei gruppi di punti secondo cui la retta AB taglia C_1^n e C_2^n, quando si considerino (λ_1, λ_2) come coordinate su AB del punto avente nel piano le coordinate (1), sono date evidentemente da:

$$\sum_{i_1\ldots i_n}^{1,2,3}\ \sum_{k_1\ldots k_n}^{1,2} a_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{(k_1)}\ldots x_{i_n}^{(k_n)}\ \lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_n}=0$$

$$\sum_{j_1\ldots j_n}^{1,2,3}\ \sum_{k_1\ldots k_n}^{1,2} b_{j_1\ldots j_n} x_{j_1}^{(k_1)}\ldots x_{j_n}^{(k_n)}\ \lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_n}=0\ ;$$

quindi perchè essi risultino coniugati occorre e basta che sia:

$$(2)\quad \sum_{k_1 \dots k_n}^{1,2} \sum_{i_1 \dots i_n}^{1,2,3} \sum_{j_1 \dots j_n}^{1,2,3} (-1)^{k_1+\dots+k_n} a_{i_1 \dots i_n} b_{j_1 \dots j_n} x_{i_1}^{(k_1)} \dots x_{i_n}^{(k_n)} x_{j_1}^{(k'_1)} \dots x_{j_n}^{(k'_n)} = 0$$

dove k'_s è 1 o 2 secondo che k_s è 2 o 1.

Osservando ora che è:

$$\sum_{k_s}^{1,2} (-1)^{k_s} x_{i_s}^{(k_s)} x_{j_s}^{(k'_s)} = - q_{i_s j_s}$$

dove con $q_{i_s j_s}$ indichiamo il minore di 2° ordine formato colla colonna i_s^{ma} e j_s^{ma} della matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{matrix} \right\|$$

la (2) si può scrivere

$$\sum_{i_1 \dots i_n}^{1,2,3} \sum_{j_1 \dots j_n}^{1,2,3} a_{i_1 \dots i_n} b_{j_1 \dots j_n} q_{i_1 j_1} \dots q_{i_n j_n} = 0 .$$

Ma è

$$q_{11} = q_{22} = q_{33} = 0$$

e le q_{23}, q_{31}, q_{12} sono le coordinate $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ dela retta AB, dunque l'equazione dell'inviluppo richiesto può scriversi:

$$(4)\quad \sum (-1)^v a_{i_1 \dots i_n} b_{j_1 \dots j_n} \xi_{l_1} \dots \xi_{l_n} = 0$$

dove il sommatorio è esteso a tutte le n-ple ordinate

$$[(i_1\, j_1\, l_1), (i_2\, j_2\, l_2), \dots, (i_n\, j_n\, l_n)]$$

che si ottengono ponendo per ciascuna delle terne $(i_s\, j_s\, l_s)$ una qualunque permutazione senza ripetizione degli indici 1, 2 e 3 e v indica il numero delle inversioni che presentano le n coppie $(i_s\, j_s)$ rispetto alle coppie (23), (31), (12) prese come coppie fondamentali.

2. La (4) mostra che:

Le rette del piano considerato secanti le curve C_1 *e* C_2 *in gruppi di punti coniugati costituiscono, in generale, un inviluppo* K *della classe n.*

Diciamo *in generale*, perchè può bene avvenire che ogni retta del piano sechi C_1 e C_2 in gruppi coniugati.

È quel che avviene per es. se si suppone che sia n dispari e che le curve C_1 e C_2 coincidano. In tal caso infatti si può supporre

$$b_{j_1 \dots j_n} = a_{j_1 \dots j_n}$$

e quindi è chiaro che il primo membro della (3) è identicamente nullo, perchè esso, per lo scambio degli indici $i_1 \ldots i_n$ con gli indici $j_1 \ldots j_n$, da una parte deve restare inalterato e dall'altra muta evidentemente di segno essendo

$$q_{i_s j_s} = - q_{j_s i_s}.$$

Del resto ciò può vedersi anche ricordando il fatto ben noto che un gruppo di punti allineati d'ordine dispari è sempre coniugato a se stesso,

3. Per ragioni di opportunità che risulteranno dal seguito l'inviluppo K si dirà *polo* di ciascuna delle due curve C_1 e C_2 rispetto all'altra e ciascuna di queste curve si dirà *polare* di K rispetto all'altra.

Per es. se C_2 si spezza in una retta contata n volte il suo polo rispetto a C_1 è l'inviluppo spezzato negli n punti in cui la retta seca C_1.

Fissiamo la curva C_1 e facciamo variare C_2 fra tutte le possibili curve d'ordine n del piano di C_1. Di qual natura sarà la corrispondenza θ intercedente fra C_2 e il suo polo K rispetto a C_1?

La risposta è immediata.

I coefficienti dell'equazione di K sono per la (3) forme lineari omogenee dei coefficienti dell'equazione della C_2 e quindi:

La corrispondenza θ è proiettiva.

Se n è dispari abbiamo già osservato che quando C_2 coincide con C_1, K è senz'altro indeterminato; dunque:

Per n dispari la proiettività θ è certo singolare.

4. Allo scopo di precisare maggiormente l'ultima affermazione fatta si osservi che nell'equazione (4) accanto al termine

$$(-1)^v a_{i_1 \ldots i_n} b_{j_1 \ldots j_n} \xi_{l_1} \ldots \xi_{l_n}$$

vi è l'altro

$$(-1)^{n-v} a_{i_1 \ldots i_n} b_{l_1 \ldots l_n} \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_n}$$

che è dello stesso segno o di segno contrario al primo, secondo che n è pari o dispari; quindi le equazioni della corrispondenza θ possono immaginarsi scritte in modo che il determinante Δ della sostituzione lineare che esse rappresentano risulti simmetrico o emisimmetrico secondo che n è pari o dispari.

Se n è dispari, il determinante Δ, il cui ordine è

$$\frac{n(n+3)}{2} + 1 = N + 1$$

è certo nullo. Ma un determinante emisimmetrico è a caratteristica necessariamente pari, ed $N+1$ è pari o dispari secondo che n è della forma

$4k+3$ o $4k+1$; dunque se n è dispari, Δ ha la caratteristica $\leq N-1$ o $\leq N$ secondo che è n e della forma $4k+3$ o $4k+1$.

Si conclude che:

Se n è dispari la proiettività singolare θ è di specie ≥ 1 o di specie ≥ 2 secondo che n è della forma $4k+1$ o $4k+3$.

Per n pari la proiettività θ, in generale, non è singolare. Tale è infatti per $n=2$ e C_1 irriducibile; nel qual caso, come risulterà dal seguito, l'affermazione che θ non è singolare equivale al teorema di Brambilla ricordato nell'introduzione.

5. Chiameremo *associate* due curve piane d'ordine n, quando è indeterminato il polo di ciascuna di esse rispetto all'altra.

Allora le osservazioni fatte nei numeri precedenti permettono di asserire che;

Data una curva piana generale d'ordine pari non esiste alcuna curva associata ad essa:

mentre:

Data una curva piana d'ordine dispari esiste almeno una curva associata ad essa o ne esistono almeno ∞^1 formanti fascio secondo che l'ordine della curva è della forma $4k+1$ o della forma $4k+3$.

Fisica. — *Sulla teoria elettronica delle forze elettromagnetiche.* Nota I di ELENA FREDA, presentata dal Socio CORBINO.

§ 1. Nelle teorie dei fenomeni elettrici, anteriori allo sviluppo della teoria elettronica, si riteneva in genere che la distribuzione delle correnti elettriche in un conduttore non venisse alterata per la creazione di un campo magnetico costante, dovuto alla vicinanza sia di un magnete sia di un altro conduttore percorso pure da corrente; tale opinione era collegata all'altra che la forza elettromagnetica o elettrodinamica, sollecitante il conduttore a muoversi trasversalmente alle linee di forza magnetiche, avesse il suo punto di applicazione, non sulla *corrente*, ma sul conduttore attraversato da essa. Queste idee sono esposte, ad esempio, dal Maxwell nel secondo volume del suo trattato di elettricità e magnetismo [1] e, alquanto più recentemente, dal Pellat nel secondo volume del suo corso di elettricità [2].

Ma ormai, le numerose ricerche sperimentali, sui fenomeni che prendono origine nei conduttori percorsi da corrente e sottoposti all'azione di

(1) Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, vol. II, pp. 144-145 (Oxford, Clarendon Press, 1873).

(2) Pellat, *Cours d'électricité*, tome II, pp. 9-10 (Paris, Gauthier-Villars, 1903).