ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

di retta, allora moltiplicando (40) per x o per x_r, e sommando con le analoghe si trova

$$(41) \qquad \mathrm{A}a_{11} + 2\mathrm{B}a_{12} + \mathrm{C}a_{22} = 0$$

e $a_{r1}\alpha + a_{r2}\beta = 0$; donde, essendo $\Delta \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$; cosicchè (40) è del tipo:

$$(40)_{bis} \qquad \mathrm{A}x_{11} + 2\mathrm{B}x_{12} + \mathrm{C}x_{22} + \gamma x = 0 .$$

Altre relazioni sono le $\mathrm{A}h_{11ij} + 2\mathrm{B}h_{12ij} + \mathrm{C}h_{22ij} = 0$ che si trovano, moltiplicando per x_{ij} e sommando con le analoghe. Si possono adottare a rigate u_1, u_2 o le sviluppabili della congruenza, o le caratteristiche di $(40)_{bis}$. In quest'ultimo caso $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$; perciò $a_{12} = 0$, $h_{12ij} = 0$; $\varphi = a_{11}\,du_1^2 + a_{22}\,du_2^2$; $\Phi = k_{1111}\,du_1^4 + k_{2222}\,du_2^4 - 2(21\,,21)\,du_1^2\,du_2^2$. Perciò Φ è del tipo $\chi\bar{\chi} + \frac{1}{2}\frac{(21\,,21)}{-a_{12}^2}\varphi^2$ (cfr. § 6. È $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\frac{(21\,,21)}{-a_{12}^2} = \frac{1}{2}$ curvatura di φ). Dare Φ equivale a dare la sola forma quadratica χ coniugata alla φ; la forma ψ del § 6 è nulla. La $(40)_{bis}$ in derivate ordinarie è poi:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\,\partial u_2} - \frac{\partial \log \sqrt{a_{11}}}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_1} - \frac{\partial \log \sqrt{a_{22}}}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \gamma x = 0 .$$

Pare che per uno studio completo delle congruenze W (*anormali*) si debba esaminare anche la forma $\mathrm{S}\,d\xi^2$, ove le ξ siano definite dalle $\mathrm{S}\xi x = \mathrm{S}\xi x_r = \mathrm{S}\xi x_{rs} = 0$, cioè siano le coordinate del complesso osculatore.

Astronomia. — *Una pseudo-determinazione della costante d'aberrazione.* Nota I del Corrisp. V. CERULLI.

Insegna l'astronomia elementare che per dedurre da una serie di misure di latitudine di un dato luogo, prese tutte con la medesima stella, la costante f dell'aberrazione, o piuttosto la correzione Δf che ad un valore approssimato di detta costante si compete, bisogna risolvere un sistema di equazioni a 4 incognite, aventi per ciascuna misura la forma:

$$(1) \quad (\Delta\varphi_0 - \Delta\delta) - t\mu - b\cos(\odot + \mathrm{B})\,.\,\pi - b\sin(\odot + \mathrm{B})\,.\,\Delta f = \varphi - (\varphi_0 + \Delta\varphi)$$

dove indicano [1]:

φ e φ_0 risp. la latitudine misurata e la latitudine media;
$\Delta\varphi$ la variazione di latitudine dovuta alla polodia;

[1] Se le osservazioni abbracciano un periodo di tempo considerevole p. es. più di un decennio, la (1) va completata del termine di nutazione.

$\Delta\varphi_0$ e $\Delta\delta$ risp. la correzione della φ_0 assunta e della δ media della stella;
μ il moto proprio della stella, in declinazione;
t il tempo in unità di anno tropico, contato a partire dall'epoca per cui vale la declinazione media della stella;
π e Δf risp. la parallasse della stella e la correzione della costante di aberrazione, servita a calcolare la δ apparente da cui si è tratta la φ;
$\odot$ la longitudine del Sole;

e le quantità ausiliarie b e B s'intendono determinate dalle relazioni:

$$b \sin B = \sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon \qquad b \cos B = -\cos\alpha \sin\delta\,,$$

con α e δ indicando le coordinate della stella, e con ε la obliquità dell'eclittica. La ragione della formula (1) è ovvia. Essa significa che posta la latitudine *vera* successivamente eguale a $\varphi_0 + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi$ ed a $\varphi + \Delta\delta + t\mu + b\cos(\odot + B)\,.\,\pi + b\sin(\odot + B)\,.\,\Delta f$, queste due espressioni devono equivalersi.

Le 4 incognite che il problema presenta naturalmente associate, sono $(\Delta\varphi_0 - \Delta\delta)$, μ, π e Δf, delle quali la prima si compone di due parti che una sola stella non basta a separare.

I *coefficienti* d'aberrazione e di parallasse, ossia le quantità $b\sin(\odot + B)$ e $b\cos(\odot + B)$ le indicheremo con C e D, e chiameremo φ' la latitudine *calcolata*, vale a dire: $\varphi_0 + \Delta\varphi$. Inoltre indicheremo della incognita $(\Delta\varphi_0 - \Delta\delta)$ la sola prima parte, e la (1) si scriverà:

$$\Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f = \varphi - \varphi'\,. \tag{2}$$

I $\Delta\varphi$ che entrano nella costituzione delle φ' non possono considerarsi incogniti, ma devono desumersi dai risultati del servizio internazionale della polodia (¹). Potevano (e dovevano anzi) trattarli da incognite gli astronomi di anche soli trenta anni fa, che della polodia non conoscevano altro che il periodo Euler-Chandleriano, in base al quale era loro lecito immaginarsi i $\Delta\varphi$ espressi dalla formula $a\sin\left(\frac{360^\circ t}{1.185} + A\right)$, con t indicando il tempo in unità di anni giuliani, e farli quindi tutti dipendere dalle due sole incognite $\xi = a\cos A$ $\eta = a\sin A$, sostituendo alla (2) l'equazione a 6 incognite:

$$\Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f + \sin\frac{360^\circ t}{1.185}\cdot\xi + \cos\frac{360^\circ t}{1.185}\cdot\eta = \varphi - \varphi_0\,. \tag{3}$$

(¹) Il calcolo dei $\Delta\varphi$ si fa dalle x ed y « internazionali », omettendo il termine z. Con ciò si è sicuri di non introdurre nel calcolo quantità che già suppongano un valore definito della costante f. Se questa è, infatti, leggermente erronea, solo z può risentirne.

Ma dopo che la polodia s'è presa a seguire con osservazioni dirette, e s'è visto che essa non è rappresentabile nè con uno nè con pochi termini a parametri fissi, poichè al periodo chandleriano se ne aggiungono parecchi altri con amplitudini variabili, l'idea di sostituire ai $\Delta\varphi$ « internazionali » ossia effettivi, i $\Delta\varphi$ teorici, dipendenti da parametri che dovrebbero determinarsi dalle stesse misure di latitudine che servono a trovar π e Δf, è naturalmente da abbandonare. Basti dire che uno dei periodi più notabili, dopo il chandleriano, è il periodo annuo, i cui effetti possono arrivar a superare la metà di quelli del primo. Or se noi di tal periodo volessimo tener conto con l'aggiungere alla (3) due termini della forma $\sin \odot . \lambda \cos \varrho + \cos \odot . \lambda \sin \varrho$, questi si fonderebbero con gli altri due termini annui $(-\mathrm{D}\pi - \mathrm{C}\Delta f)$ e le (3), così completate, condurrebbero per π e Δf a risultati della forma 0/0 (1).

L'equazione (2) resta quindi nelle 4 incognite $\Delta\varphi_0$ μ π Δf, ma alla determinazione di queste due ultime, ora che la costante $f = 20'',47$ è già da considerare assai prossima all'esattezza, si oppone, per altra provenienza, la stessa difficoltà che or ora dicemmo originarsi dal periodo annuo della polodia. Le due onde $\mathrm{D}\pi$ e $\mathrm{C}\Delta f$ interferiscono infatti con altre piccole onde annue, più o meno irregolari, e di *fase incognita*, principali fra cui sono:

a) la rifrazione zenitale esterna, dipendente dal gradiente orizzontale della temperatura;

b) la rifrazione zenitale interna, detta anche rifrazione di camera, che dove l'installazione dell'istrumento non fu curata a dovere, può arrivar anche a superare i decimi di secondo;

c) l'effetto della illuminazione del fondo del cielo, che varia secondo leggi ancora inesplorate, con lo splendore della stella, e si fa sentir a preferenza in quei metodi di misura di φ nei quali alla bisezione della stella con un filo mobile è sostituito il tempo di appulso della stella a un filo fisso (misure in primo verticale, senza micrometro registratore) (2).

Queste tenui onde annue, che insieme costituiscono una vera e propria *perturbazione del Zenit* interessano anch'esse i centesimi di secondo (in generale) e mescolandosi con le onde provenienti dal residuo di aberrazione e dalla parallasse, ne rendono difficilissima la ricognizione a parte. La difficoltà è anzi insuperabile quando le misure di latitudine siano limitate ad una sola stella. Allora si può bensì separare, in forza dell'equazione (2),

(1) Aggiunti nel sistema di equazioni (3) i detti termini, esso basta a determinare *in blocco* le incognite

$$\lambda \sin \varrho - b \cos \mathrm{B} . \pi - b \sin \mathrm{B} . \Delta f \qquad \lambda \cos \varrho + b \sin \mathrm{B} . \pi - b \cos \mathrm{B} . \Delta f ,$$

vale a dire a darci due sole equazioni fra le quattro quantità λ ϱ π Δf.

(2) In questa perturbazione annua del Zenit possiamo immaginar inclusa anche la problematica « rifrazione cosmica » del Courvoisier.

l'effetto dell'aberrazione da quello della parallasse, ma non si riesce a sapere di quanto ciascuno di questi effetti venga alterato dalla perturbazione del zenit.

Allo stato attuale della scienza, dunque, come nessuno più pensa a trovar le parallassi mediante misure di latitudine, così nessuno può ripromettersi un $\varDelta f$ attendibile da latitudini prese con una sola stella (1). Chi per tal via semplicistica fosse riuscito ad un $\varDelta f$ apparentemente buono, accompagnato, cioè, da piccolo error medio, non tarderebbe a riconoscerlo illusorio, quando assoggettasse allo stesso trattamento una seconda stella lontana dalla prima, o anche vicina, ma di altra grandezza. Le due stelle, risentendo diversamente la perturbazione zenitale, darebbero $\varDelta f$ diversi. Solo un complesso di misure, ripartite sopra tutta la zona zenitale, o su almeno quella parte di essa cui corrispondono i maggiori valori del coefficiente di aberrazione (2), potrebbe dar all'astronomo, in capo a molti anni di lavoro, una idea non troppo fallace di quel che sia il vero $\varDelta f$. Ma è da prevedere che fino a tanto che l'equazione del zenit, e specialmente la parte di essa, proveniente dalla rifrazione esterna, che è quella che resta sempre in opera, non sia conosciuta indipendentemente dalle misure di latitudine, la costante d'aberrazione non riuscirà mai a perfettamente svincolarsene, e resterà indeterminata entro 3 o 4 cent. di secondo, se altri processi, oltre quello delle latitudini, non interverranno a meglio precisarla.

Questa considerazione preliminare è stata fatta per attingervi i criterî d'esame di un lavoro del sig. G. Boccardi, inserito negli Atti della R. Acc. di Torino (3), ed i cui risultati si riportano a pag. 311 del Bulletin astronomique del 1916. Il lavoro s'intitola: *Saggio sulla costante d'aberrazione.*

L'autore aveva a sua disposizione 4 serie triennali di misure di latitudine, fatte a Pino Torinese, sulle stelle β Aurigae, ψ Ursae majoris,

(1) Bradley potè bensì *scoprire* l'aberrazione con una sola stella zenitale (γ Draconis); ma si trattava allora del *grosso* del fenomeno, e di misurar una quantità 1000 volte quella che s'ha da determinar oggi per correggere la costante 20″,47.

(2) Il fattore b del coefficiente d'aberrazione di stelle zenitali, è al suo minimo sotto $\alpha = 6^h$, ed al massimo sotto $\alpha = 18^h$. Tali valori alla latitudine di 45° sono: minimo $= 0{,}37$, massimo $= 0{,}93$. Però da $\alpha = 14^h$ a $\alpha = 22^h$ b varia appena tra i limiti 0,86 e 0,93, cosicchè può dirsi che la regione zenitale più *favorevole* alla ricerca della costante f abbracci 8 ore di AR.

(3) Classe di scienze fis. ecc. vol. L, pp. 649-671, e vol. LI, pp. 308-317. Sono due Note di cui la seconda è una ripetizione della prima, con materiale di osservazioni un po' più esteso. Ci riferiremo di solito alla seconda.

Dei simulacri di *risposta*, a base d'ingiurie, che si vengono *pro forma* contrapponendo a queste nostre Note, ci vieta d'occuparci il rispetto dovuto all'Accademia e a noi stessi. Solo ci basta avvertire che mal si spera con le contumelie (che disprezziamo) distoglierci dal far ciò che stimiamo nostro preciso dovere, nell'interesse della verità e serietà scientifica.

δ Cygni, α Cygni, e proponendosi, per suo studio, di tentare una determinazione di Δf, la considerazione separata delle quattro stelle gli sarebbe riuscita assai istruttiva, mostrandogli all'atto pratico gli effetti della perturbazione zenitale. I quattro Δf sarebbero risultati differenti tra loro nei *decimi di secondo*: vale a dire così radicalmente diversi, da far subito capire non esser cosa seria il voler presentare uno di essi o anche il loro medio aritmetico, come valore probabile della costante d'aberrazione. Senonchè il Boccardi non solo ha lasciato completamente da banda le due prime stelle, ma ha anche creduto potersi abbreviare della metà la fatica delle altre due, fondendone le osservazioni in medie aritmetiche, con che si è, senza accorgersene, privato di un mezzo prezioso, che pur era a sua disposizione, di saggiare l'attendibilità del suo risultato.

Tuttavia, anche tenuta in tale erronea forma, la ricerca sarebbe potuta servire a qualche cosa, col farci sapere a quale Δf *peculiare* conducono le osservazioni della stella $^1/_2(\alpha+\delta)$ Cygni, poichè si è, come dicevamo, dall'insieme dei Δf peculiari alle diverse stelle, che può trarsi qualche lume circa il *vero* Δf. Ma in realtà è facile accorgersi, esaminando le Note del Boccardi, che egli non è pervenuto neanche alla conoscenza di codesto Δf peculiare, e che, insomma, non ha ottenuto risultato di sorta.

Cominciamo dall'esporre il suo metodo. Nell'equazione (2) ha egli creduto poter omettere i primi tre termini, il primo dei quali $(\Delta\varphi_0)$ effettivamente si elimina, insieme alla φ_0, per la forma di calcolo adottata, ma i due altri, il Boccardi li ha ritenuti nulli *a priori*, sapendo che la stella in quistione non ha parallasse nè moto proprio sensibili. Pertanto, l'opera sua si aggira tutta intorno all'equazioncella:

$$C\Delta f + \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \tag{4}$$

nella quale si risparmia, anzi, di scrivere anche il termine $\Delta\varphi$, come quello che per l'uso che farà dell'equazione, egli crede condannato a sparire.

A prescindere che la stella di cui si tratta ha in realtà un moto proprio (1) non trascurabile, poichè interessa i centesimi di secondo, entro i quali appunto il calcolo s'aggira, l'A. doveva riflettere che della nullità di μ e π non si può decidere che *a posteriori*, cioè dopo effettivamente risolte le (2), poichè uno dei controlli dell'attendibilità di Δf consiste appunto nella *verisimiglianza* dei valori risultanti per quelle altre incognite, specialmente per la parallasse, la cui determinazione si fa *in condizioni identiche* a quelle di Δf. Oltre a ciò, se le osservazioni che si discutono, portano a valori non nulli delle dette incognite accessorie, è certo che il trascurar que-

(1) Nella *Connaissance des temps pour 1919* troviamo registrati i seguenti valori di Newcomb: α Cygni $\mu = -0'',002$, δ Cygni $\mu = +0'',044$. Il moto proprio della stella fittizia $^1/_2(\alpha+\delta)$ Cygni è dunque $= +0'',021$.

ste avrebbe resa insufficiente, e quindi erronea la (2). L'effetto dei termini omessi si sarebbe naturalmente riversato sul termine d'aberrazione, falsificandolo.

Effettivamente, come si vedrà nella nostra II Nota, il calcolo rigoroso avrebbe dato $\mu = + 0''.001$, $\pi = - 0''.089$ onde l'accorciamento inflitto dal nostro A. alla equazione fondamentale, risulta ingiustificato per il termine di parallasse, senza dire che il valore negativo della parallasse stessa è in questo caso un assurdo, trattandosi di parallasse *assoluta*; ciò che depone tutt'altro che in favore della capacità delle osservazioni che esaminiamo, a darci lumi circa l' incognita Δf.

Ma oltre la licenza presasi col sopprimere la parallasse e il moto proprio, il Boccardi ha anche sbagliato il segno dell'unico termine che lo interessava: quello d'aberrazione! Il coefficiente di tal termine non è $+ \mathrm{C}$ come vorrebbe la (4), ma $- \mathrm{C}$. L'equazione (4) è dunque erronea anche per quest'altro verso. E l'errore è tanto più degno di nota e sostanziale, in quanto, correggendolo, muta di punto in bianco la *natura* del risultato. Non rendendosi conto dei limiti d'indeterminazione del problema, Boccardi s'è creduta lecita l'*opinione* che la costante $20''.47$ fosse *troppo piccola*, ed ha voluto che la sua ricerca contribuisse, se non altro, ad avvalorar questa tesi, ben lontano dal sospettare che le sue stesse osservazioni, rimosso l'errore in parola, avrebbero deposto in favore della tesi opposta, che, cioè, la costante $20''.47$ è *troppo grande* [1]

Ma per proseguire nel nostro esame, prendiamo pure l'equazione (4) mutilata ed erronea com'essa è, e vediamo l'uso che l'A. ne ha fatto. L'equazione conterrebbe secondo abbiamo detto sopra, la sola incognita Δf, poichè i $\Delta \varphi$ si devono calcolare dalla polodia cognita, i quali $\Delta \varphi$ « internazionali » devon anche servire a dedurre un primo valore della latitudine media φ_0 da tutte le misure di φ di cui l'osservatore dispone. Se non che l'A. del *Saggio*, terminata appena la serie triennale delle sue misure di latitudine, sente il bisogno di riformare la costante d'ab. e non ha tempo di aspettare che la polodia del 1913-15 sia resa di pubblica ragione [2]. Di essa pensa egli

[1] L'errore nel segno del coefficiente C è certamente provenuto da maldestro *trasporto* di formula dalla declinazione alla latitudine. Volendo infatti dedurre π e Δf da misure di declinazione (supposta cognita la latitudine), si impiega l'equazione $\delta_0 - \delta_c = \Delta\delta + t_\mu + \mathrm{D}\pi + \mathrm{C}\Delta f$ dove δ_0 è la declinazione osservata, e δ_c la declinazione calcolata con la costante $20'',47$. Ma se si usa la latitudine, bisogna riflettere che la latitudine misurata suppone anch'essa la costante $20'',47$, e che quella che non la suppone è la non misurabile latitudine *vera*. Perciò l'analoga dell'equazione precedente, in termini di latitudine, è $\varphi_{\text{vera}} - \varphi_{\text{misur.}} = \Delta\delta + t_\mu + \mathrm{D}\pi + \mathrm{C}\Delta f$, formula da cui si elimina la φ_{vera} ponendola $= \varphi_0 + \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi$ e ne risulta la (2) del testo.

[2] La polodia del 1912-15 fu pubblicata dal Wanach nelle Astr. Nach. durante il 1916. Per abbracciare 3 cicli interi l'A. ha dovuto aggiungere alle serie triennali di

poter far a meno, e che siagli lecito supporre che attraverso n periodi interi di Chandler i $\Delta\varphi$ uniformemente distribuiti si compensino. Questa ipotesi equivale all'assumere i $\Delta\varphi$ sinusoidali, e ad ignorar fra gli altri periodi della polodia anche l'essenzialissimo periodo annuo: altro grave errore che vien ad aggiungersi ai notati. In base a cotesto principio l'A. calcola φ_0 facendo la media di tutte le φ trovate giorno per giorno dal giugno 1912 al gennaio 1916 (tre cicli di Chandler), e lascia nella (4) il $\Delta\varphi$ come una seconda incognita, a fianco della incognita principale Δf.

Se ci fermiamo un momento a considerare questo calcolo di φ_0, vediamo che esso equivale a scrivere le N equazioni (4) rispondenti alle N osservazioni singole, che in tutto si possiedono, ed a sommarle trascurando due termini ritenuti *a priori* per nulli. La somma infatti di N equazioni come la (4) è $\Delta f\, \Sigma C + \Sigma\Delta\varphi = \Sigma\varphi - N\varphi_0$, e siccome l'Autore assume $\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N}$, così egli ha trascurato $\Delta f \frac{\Sigma C}{N} + \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}$. Il primo di questi termini è l'effetto residuo dell'aberrazione su φ_0 ed il secondo l'effetto residuo della polodia.

Secondo l'ipotesi dell'A. sarà nullo bensì il secondo, ma non il primo; in realtà poi non è nullo nè l'uno nè l'altro, ed abbenchè l'espressione $\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N}$ dia (essendo N abbastanza grande) una φ_0 relativamente corretta, non bisogna perder di vista che la formula esatta è

$$\varphi_0 = \frac{\Sigma\varphi}{N} - \Delta f \frac{\Sigma C}{N} - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N},$$

e che quindi l'equazione (4) in virtù del modo come l'A. ha calcolato (o anzi eliminato) φ_0, vien sostituita da quest'altra:

$$\left\{ C - \frac{\Sigma C}{N} \right\} \Delta f + \left\{ \Delta\varphi - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N} \right\} = \varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N} \tag{5}$$

dove i sommatorî s'intendono estesi a tutti e tre i cicli utilizzati.

Nelle equazioni (4) appaiono le 2 incognite Δf e $\Delta\varphi$, la prima delle quali è fissa, ma la seconda varia da una equazione all'altra. Se 48 sono le equazioni, come nel nostro caso, 49 saranno le incognite, e volendo conoscere la sola Δf, si tratta di sapere come si farà a sbarazzarsi dei 48 $\Delta\varphi$.

Qui, e non prima di qui, sembra al nostro A. che sia il caso di servirsi di una sommazione. Se si aggruppano, pensa egli, le osservazioni in

---

latitudine, fatte con un cannocchiale di Bamberg, le misure antecedenti (1912) fatte con un istrumento prestatogli dall'ufficio geodetico di Prussia, non ostante avesse di esse già rilevato « il grado di precisione non singolare » (vedi G. Bocc., *La variazione delle latitudini*, nelle Mem. d. Pontif. Acc. Rom. N. L., vol. XXXII).

medie mensili [1] successive, abbraccianti nuovamente i 3 cicli dal giugno 1912 al gennaio 1916, e calcolata per ciascuna media l'equazione (4) corrispondente, si fa di tali equazioni la somma, i $\Delta\varphi$ dovranno mutuamente elidersi, perchè uniformemente distribuiti, e l'equazione risultante ridursi a contenere la sola incognita Δf. Questa è anche la ragione per cui l'A. omette i $\Delta\varphi$ nelle equazioni mensili.

Ora esaminiamo che cosa ci dice su questo punto l'equazione corretta (5). Supponiamo siano n le misure su cui si fonda una media mensile qualunque φ_m, cosicchè la somma di tutte le misure fatte nel mese sia $n\varphi_m$ ed addizioniamo le n equazioni (5) corrispondenti. Avremo per l'equazione mensile la forma esatta:

$$n\left\{C_m - \frac{\Sigma C}{N}\right\}\Delta f + n\left\{\Delta\varphi_m - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\right\} = n\left\{\varphi_m - \frac{\Sigma\varphi}{N}\right\} \tag{6}$$

dove C_m $\Delta\varphi_m$ e φ_m indicano i valori medî mensili di C $\Delta\varphi$ e φ. E se di equazioni come la (6) facciam nuovamente, come l'A. vuole, la somma, attraverso i 3 cicli, risulterà:

$$\left\{\Sigma n\, C_m - \Sigma C \frac{\Sigma n}{N}\right\}\Delta f + \left\{\Sigma n\, \Delta\varphi_m - \Sigma\Delta\varphi \frac{\Sigma n}{N}\right\} = \left\{\Sigma n\, \varphi_m - \Sigma\varphi \frac{\Sigma n}{N}\right\}. \tag{7}$$

Ma si ha pure, evidentemente:

$$\Sigma n\, C_m = \Sigma C \qquad \Sigma n\, \Delta\varphi_m = \Sigma\Delta\varphi \qquad \Sigma n\, \varphi_m = \Sigma\varphi \qquad \Sigma n = N.$$

Dunque le quantità in parentesi nella (7) sono tutte e tre identicamente nulle, e la equazione si riduce a $0 = 0$. In altre parole, l'equazione a cui il Boccardi crede di poter ricorrere per liberarsi dei $\Delta\varphi$, *non esiste*. Boccardi non riflette che di essa equazione s'è già servito una prima volta (come sopra s'è visto) per trovare φ_0, e che non è più in sua potestà servirsene una seconda per trarne il Δf. All'eccesso illogico di sfruttamento l'equazione si sottrae dileguandosi!

Il metodo quindi che il nostro A. dice *da sè ideato* per separare l'incognita Δf dai $\Delta\varphi$ è semplicemente assurdo, una sola equazione non potendo bastare alla determinazione di due incognite.

[1] Veramente le medie di Boccardi non sono di mese in mese, bensì per intervalli di 28 giorni, con ciò intendendo egli eliminare la forte onda lunare semimensile da lui scoperta, e della cui inesistenza ci occupammo nella nostra Nota: *Su di una pretesa, forte variazione di latitudine a breve periodo*, Rend. R. Lincei, XXVII, pag. 213.

A quella Nota si è obbiettato che vi si accordi egual considerazione a tutte le misure di latitudine dell'A., senza badare ai segni con cui egli aveva distinto dalle buone, le mediocri e le cattive. Ma anche questo è un errore. Le osservazioni *segnate* (che ben potevano, del resto, omettersi nella pubblicazione) sono *tante* che il loro effetto non può non ripartirsi equamente sulle diverse semiore. Ripeta l'A. del *Saggio* il nostro calcolo, *con esclusione di tutte le misure segnate*, e ci dica se ha veduto *venir in luce* qualche traccia di onda semimensile.

In realtà, con la sua sola equazione-somma $\Delta f \, \Sigma C = \Sigma \varphi - N\varphi_0$ l'A. non poteva trovar nè Δf nè φ_0, ma solo un valore approssimato di questa seconda incognita, mettendo l'altra a zero. Ciò in considerazione del forte coefficiente di φ_0, come si disse, e della piccolezza di Δf.

Che se nelle mani del Boccardi l'equazione-somma non s'è dileguata, è anche facile scoprire quello che egli ha fatto. Nelle equazioni mensili (6) ha egli *brevi manu* soppresso il fattore n che era invece essenziale di lasciar al suo posto, affinchè ogni equazione mensile concorresse nell'equazione-somma col peso o voce che le spettava. Lo ha soppresso, dico, in generale, solo lasciandolo in piedi in 5 equazioni, nelle quali gli ha dato, non meno arbitrariamente, il valore 1/2. Inoltre, trascurando $\frac{\Sigma C}{N}$ e $\frac{\Sigma \Delta\varphi}{N}$, ha mantenuto le equazioni mensili nella forma primitiva delle diurne:

$$C_m \Delta f + \Delta\varphi_m = \varphi_m - \varphi_0 . \tag{8}$$

Di queste equazioni se ne hanno, come dicevamo, 48, di cui 5 divise per 2. Chiamando φ_0' la media pesata delle 48 φ ossia $\frac{\Sigma n \varphi_m}{45.5}$ (dove n per 5 valori di φ_m è $= 1/2$, e per i 43 rimanenti è $= 1$) la somma di 48 equazioni come la (8), tenuto conto delle 5 divisioni per 2, darà:

$$\Delta f \, \Sigma n \, C_m + \Sigma n \, \Delta\varphi_m = \Sigma n \, \varphi_m - 45.5 \, \varphi_0 = 45.5 \, (\varphi_0' - \varphi_0) . \tag{9}$$

Questa è la somma erronea a cui è venuto l'A. e si vede da essa che il non-annullamento del primo membro è dipeso dalla forma della (8), ed il non-annullamento del secondo, dai pesi arbitrarî dati alle equazioni mensili, in forza dei quali è intervenuto uno *sdoppiamento* assurdo tra la media generale delle misure (φ_0) e la media pesata delle medie mensili (φ_0) [1].

C'è anche da osservare che nel primo membro della (9) è venuto a figurare il termine $\Sigma n' \Delta\varphi_m$ dove gli n son quelli assunti arbitrariamente dal Boccardi, e non i veri (proporzionali ai numeri delle osservazioni mensili), e quindi non può più il termine stesso ritenersi nullo, come lo vorrebbe l'A. in base al postulato dei $\Delta\varphi$ sinusoidali. Ciò vuol dire che se i pesi arbitrariamente dati alle equazioni mensili han salvato da zero il secondo membro dell'equazione-somma, han d'altra parte impedita quella separazione di Δf dai $\Delta\varphi$ che l'A. si lusingava di ottenere, onde l'equazione (9) è in realtà a 2 incognite, anzichè nella sola Δf: ciò che sfugge ad un lettore

[1] Del resto, anche mantenendo inalterati i primi membri delle equazioni mensili, se il Boccardi non ne avesse fissato i pesi ad arbitrio, ed in disaccordo con i numeri delle osservazioni di ciascuna, il secondo membro della equazione-somma si sarebbe sempre annullato, e l'assurdo avrebbe rivestito la forma di *auto-eliminazione delle misure*. Ciò perchè il modo come è calcolato φ_0 implica già la nullità di Δf, qualunque sia la serie di osservazioni da cui questa incognita si vuol dedurre.

non troppo attento, il Boccardi avendo sempre omesso di scrivere i termini in $\Delta\varphi$, e lasciato al lettore stesso di immaginarseli.

La divisione per 2 non ha avuto altro movente che quello d'impedire che presso 5 equazioni mensili i termini noti contrastassero troppo con i termini noti delle equazioni limitrofe. Ma quando si è creduto buono l'andamento di detti termini, non si è guardato più che tanto alla disparità del numero d'osservazioni tra l'uno e l'altro. Non mancano qua e là medie mensili non dedotte da osservazioni, ma semplicemente *interpolate*, per l'una o per l'altra stella, ed anche s'incontra una media (nov. 1912) interpolata per entrambe le stelle, alla cui equazione si è dato egual peso che alle più ricche medie!

Codesta bizzarra procedura non può non ridondar a danno dell'opera, onde è ovvio e legittimo il sospetto che le medie mensili non siano espressione genuina delle osservazioni. Saranno attenuati bensì gli errori accidentali, ma sottentrandovi più forti errori sistematici.

Le dette equazioni-somma, perfettamente, come dicevamo, illusorie, ed aventi origine in errori di calcolo, sono:

Da due cicli chandleriani (1912-1915):

$$+2.42\,\Delta f = +0''.361 \quad \text{da cui:} \quad \Delta f = +0''.149 .$$

Da tre cicli (1912-1916):

$$+4.82\,\Delta f = +0''.089 \quad \text{da cui:} \quad \Delta f = +0''.018 .$$

Il primo di questi Δf è sembrato all'A. inammissibile, poichè prudentemente si astiene dal risolvere la prima equazione, e solo si limita a rimarcare che da essa il Δf si determinerebbe in *cattive condizioni*, il coefficiente 2.42 essendo *troppo piccolo*! Ma il secondo, certamente perchè piccolo, non gli è parso indegno (abbenchè l'equazione da cui deriva stia nel più stridente contrasto con l'altra, pur provenendo entrambe da un materiale di osservazioni per $^2/_3$ identico) di concorrere in una media aritmetica col valore di Δf che risulterà da un secondo modo di sommazione delle equazioni mensili.

Di codesto secondo modo, non meno erroneo del primo, ci occuperemo in un'altra Nota, nella quale anche mostreremo qual sia il vero valore di Δf risultante dalle osservazioni del Boccardi, o piuttosto da quelle che egli ci presenta come medie mensili.