ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 gennaio 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* VIII. *Soluzioni binarie di Weyl.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

In una Memoria pubblicata nell'agosto 1917 (1), il sig. Weyl ebbe la felice idea di prendere in considerazione quella classe di problemi della statica einsteiniana, in cui tutte le incognite si possono far dipendere da due sole coordinate, essendo inoltre soddisfatta una certa condizione di ortogonalità. Tale classe è particolarmente notevole per la sua generalità, potendo (mediante quadrature e operazioni in termini finiti) essere posta in corrispondenza biunivoca cogli ordinarî potenziali simmetrici, di cui costituisce l'analogo einsteiniano.

A questa stessa categoria di soluzioni ero pervenuto per mio conto alquanto più tardi, come esempio cospicuo di quel tipo generale B_1) (cfr. Nota II, § 6) (2), in cui lo spazio fisico si atteggia a varietà normale del Bianchi (con curvature principali distinte). Avendo in seguito conosciuta, per gentile invio dell'Autore, la ricerca di Weyl e rilevato che egli mi aveva preceduto nell'idea, e, sebbene per via diversa, nei risultati principali, pensavo di non pubblicare il mio studio, o tutt'al più di limitarmi a segnalare un'applicazione elementare meritevole di interesse perchè rispecchia il campo dovuto all'attrazione di una retta indefinita. Ma una più

(1) Ann. der Physik, B. 54, pp. 117-145.

(2) In questi Rendiconti, vol. XXVII (1° semestre 1918), pp. 3-12.

attenta lettura del lavoro di Weyl mi ha mostrato che la sua deduzione è incompleta (cfr. in proposito il § 5 del presente scritto). Egli tien conto soltanto di tre equazioni, che, in certo senso, sono effettivamente le più importanti, ma non esauriscono il sistema cui si riducono nel caso considerato le equazioni della statica einsteiniana. Questo sistema è costituito da cinque equazioni (una delle quali risulta conseguenza differenziale delle altre). Per un singolare compenso il Weyl aggiunge alle sue tre equazioni una condizione qualitativa che rende il grado di arbitrarietà eguale a quello del sistema completo. E il risultato finale è corretto, tranne per quanto concerne una delle incognite (la nostra λ, ivi designata con γ).

Stando così le cose, mi permetto di rendere di pubblica ragione il mio procedimento. Riservo ad altra prossima comunicazione una breve illustrazione geometrica e l'esempio cui sopra accennai.

1. — Definizione e caratterizzazione intrinseca.

Si tratta di assegnare i ds^2 statici, e quindi del tipo

$$V^2 dt^2 - dl^2 ,$$

che convengono ad uno spazio vuoto (tensore energetico nullo) sotto le due ipotesi addizionali seguenti:

1°) i coefficienti dipendono esclusivamente da due sole coordinate, diciamo x_1, x_2;

2°) il dl^2 ha forma ortogonale rispetto alla terza coordinata x_3.

Posto al solito

$$V = V_0 e^{\nu} , \tag{1}$$

con V_0 costante di omogeneità e $\nu(x_1, x_2)$ puro numero, conviene in primo luogo (come apparirà dallo sviluppo successivo del calcolo) assumere il dl^2 sotto la forma

$$dl^2 = e^{-2\nu} dl'^2 , \tag{2}$$

dove il dl'^2 ottempera ancora alle condizioni imposte al dl^2, ed è quindi del tipo

$$dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2 , \tag{3}$$

con $d\sigma$ elemento lineare binario, ed r funzione, *a priori* indeterminata, di x_1, x_2. Circa le dimensioni, è ben chiaro che (in una forma differenziale quadratica la quale esprime il quadrato di un elemento lineare) quando le variabili indipendenti si risguardano lunghezze, i coefficienti riescono puri numeri. Tale convenzione intenderemo adottata riguardo al $d\sigma$; mentre considereremo x_3 come un parametro di dimensioni nulle (per es. un angolo) e dovremo in conformità attribuire ad r le dimensioni di una lunghezza.

Va notato altresì che le due ipotesi poc'anzi enunciate sotto aspetto formale sono interpretabili intrinsecamente nella metrica definita dal dl^2. *La prima* (indipendenza dei coefficienti da x_3) *sta ad esprimere che lo spazio ammette un gruppo* ∞^1 *di movimenti rigidi*, definito dalla trasformazione infinitesima $\frac{\partial}{\partial x_3}$. *La seconda equivale* all'esistenza di superficie (le $x_3 =$ cost.) che tagliano ortogonalmente le traiettorie del gruppo ($x_1 =$ cost. , $x_2 =$ cost.), ossia *alla normalità della congruenza costituita dalle traiettorie del gruppo.*

2. — Forma binaria delle equazioni di Einstein.

Le derivate seconde covarianti di una generica funzione V, riferite ad un assegnato dl^2, e i simboli di Ricci α_{ik}, spettanti ad esso dl^2, si sanno riportare ad un dl'^2 in corrispondenza conforme (2) col dl^2, e successivamente, in base alla (3), al $d\sigma^2$ binario cui si associ la funzione r (cfr. §§ 3 e 4 della Nota III).

In primo luogo (dalle formole (5) della detta Nota, scambiando i simboli accentati con quelli non accentati e ponendo $\tau = -\nu$) si ha

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + 3\nu_i \nu_k - a'_{ik} \Delta' \nu \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{4}$$

dove le derivate covarianti ν'_{ik}, i coefficienti a'_{ik} e il parametro Δ' si riferiscono al dl'^2.

Dacchè, in base alla (2), gli elementi reciproci ai coefficienti del dl^2 valgono $e^{2\nu} a'^{(ik)}$, si ha, come conseguenza formale delle (4),

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = e^{2\nu} \Delta'_2 \nu .$$

Siccome una delle equazioni di Einstein può essere posta sotto la forma $\Delta_2 V = 0$, così possiamo intanto ritenere acquisito che

$$\Delta'_2 \nu = 0 . \tag{5}$$

E ciò giova a semplificare le espressioni [(13) della Nota III, per $\tau = -\nu$] delle α_{ik} in funzione delle α'_{ik}, che si scrivono

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} - \nu'_{ik} - \nu_i \nu_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Prima di fare il secondo passo, cioè il riferimento al $d\sigma^2$ binario, ricordiamo che le equazioni fondamentali della statica einsteiniana (negli spazî vuoti) sono sette, di cui una può essere rappresentata da $\Delta_2 V = 0$,

ossia dalla (5), e le altre sei si scrivono

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

In base alle (4) e (6), queste assumono l'aspetto

$$\alpha'_{ik} + 2\nu_i \nu_k - a'_{ik} \Delta' \nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7'}$$

Badiamo ora alla (3), notando anzi tutto che, se il $d\sigma^2$ binario ha l'espressione generica

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

si hanno i coefficienti a'_{ik} del $dl'^2 = d\sigma^2 + r^2 dx_3^2$ e i loro reciproci $a'^{(ik)}$ sotto la forma

$$\left\{\begin{array}{lll} a'_{ik} = a_{ik} \;, & a'_{i3} = 0 \;, & a'_{33} = r^2 \;; \\ a'^{(ik)} = a^{(ik)} \;, & a'^{(i3)} = 0 \;, & a'^{(33)} = \dfrac{1}{r^2} \end{array}\right. \qquad (i, k = 1, 2). \tag{8}$$

Con ciò, per una funzione qualsiasi indipendente da x_3, risulta $\Delta' = \Delta$, quindi in particolare

$$\Delta' \nu = \Delta \nu\,. \tag{9}$$

Quanto alle derivate seconde ν'_{ik}, esse si identificano colle corrispondenti ν_{ik} (relative al $d\sigma^2$) per $i, k = 1, 2$, e si ha complessivamente (formule (21) della Nota III, per ν indipendente da x_3)

$$\nu'_{ik} = \nu_{ik} \;\; (i, k = 1, 2) \;, \quad \nu'_{i3} = 0 \;, \quad \nu'_{33} = r \nabla(r, \nu)\,. \tag{10}$$

Ne deduciamo in particolare

$$\Delta'_2 \nu = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a'^{(ik)} \nu_{ik} = \Delta_2 \nu + \frac{1}{r} \nabla(r, \nu)\,. \tag{11}$$

Le espressioni dei simboli di Ricci α'_{ik}, riportate al $d\sigma^2$ e alla funzione associata r, sono [Nota III, formule (19)]

$$\alpha'_{ik} = \frac{r_{ik}}{r} - a_{ik} \frac{\Delta_1 r}{r} \;\; (i, k = 1, 2) \;, \quad \alpha'_{i3} = 0 \;, \quad \alpha'_{33} = r^2 \mathrm{K}\,, \tag{12}$$

designando K la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

Teniamo conto di quanto precede [formule (8)-(12)] nelle equazioni gravitazionali, cioè nella (5) e nelle (7').

La prima, in base alla (11), diviene

$$\Delta_2 \nu + \frac{1}{r} \nabla(r, \nu) = 0 . \tag{13}$$

Delle (7′) due rimangono identicamente soddisfatte (quelle in cui uno, ed un solo, indice ha il valore 3); una ($i = k = 3$) si riduce a

$$\mathrm{K} = \Delta \nu , \tag{14}$$

e le rimanenti tre assumono l'aspetto

$$\frac{r_{ik}}{r} + 2 \nu_i \nu_k - a_{ik} \left(\frac{\Delta_2 r}{r} + \Delta \nu \right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

covariante rispetto al $d\sigma^2$.

Da esse, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando, segue

$$\Delta_2 r = 0 ,$$

con che si può scrivere più semplicemente

$$\frac{r_{ik}}{r} + 2 \nu_i \nu_k - a_{ik} \Delta \nu = 0 \qquad (i, k = 1, 2): \tag{15}$$

in queste equazioni seguita naturalmente ad essere implicita come necessaria conseguenza la $\Delta_2 r = 0$.

Il sistema da integrare consta pertanto delle cinque equazioni (13), (14), (15), *nelle quali figurano come elementi incogniti le funzioni* r *e* ν, *e la forma binaria* $d\sigma^2$, *che funge da forma fondamentale, essendo ad essa riferiti derivate covarianti e parametri.*

Giova ancora prepararsi le espressioni, involgenti unicamente r, ν e $d\sigma^2$, che competono alle α_{ik} del dl^2 spaziale: ciò col manifesto intendimento di valersene a suo tempo pel calcolo delle curvature principali. Tutto si riduce, in virtù delle equazioni gravitazionali (7), che dànno

$$\alpha_{ik} = - \frac{\mathrm{V}_{ik}}{\mathrm{V}} ,$$

ad introdurre nei secondi membri delle (4) le espressioni (10) delle ν'_{ik}, badando altresì alle (8) e (9). Si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ik} = - \nu_{ik} - 3 \nu_i \nu_k + a_{ik} \Delta \nu \quad (i, k = 1, 2) , \\ \alpha_{i3} = 0 \quad , \quad \alpha_{33} = r^2 \left\{ \Delta \nu - \frac{1}{r} \nabla(r, \nu) \right\} . \end{array} \right. \tag{16}$$

3. — Forma isometrica del $d\sigma^2$. Ulteriore trasformazione delle equazioni gravitazionali.

Per l'armonicità di r rispetto al $d\sigma^2$ ($\Delta_2 r = 0$), esiste la funzione associata z (determinata a meno di una inessenziale costante additiva), armonica anch'essa, *indipendente da* r [1] e dotata delle stesse dimensioni, quindi omogenea ad una lunghezza.

Il $d\sigma^2$, espresso per r e z, assume notoriamente la forma isometrica

$$d\sigma^2 = e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2), \tag{17}$$

dove λ è una funzione, *a priori* incognita, di r e di z, legata alla curvatura gaussiana K dalla relazione

$$K = -\Delta_2 \lambda = -e^{-2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right). \tag{18}$$

Più comprensivamente, seguitando per un momento ancora a lasciar generiche le variabili indipendenti, potremo ritenere la (17) sotto la forma

$$d\sigma^2 = e^{2\lambda}\, d\sigma_0^2 \tag{17'}$$

con $d\sigma_0$ elemento lineare euclideo.

Prima di procedere all'integrazione del sistema (13), (14), (15), si rende opportuna un'ultima trasformazione, che riporti, in tutte le formule, derivate covarianti e parametri al $d\sigma_0^2$ euclideo.

Detti a_{ik}^0 i coefficienti di questo $d\sigma_0^2$, si ha dalla (17') $a_{ik} = e^{2\lambda} a_{ik}^0$; inoltre (invocando qui ancora le formule (5) della Nota III):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{r_{ik}}{r} = \frac{r_{ik}^0}{r} - \frac{r_i}{r}\lambda_k - \frac{r_k}{r}\lambda_i + \frac{1}{r}\nabla^0(r, \lambda)\, a_{ik}^0, \\ &\nu_{ik} = \nu_{ik}^0 - \nu_i \lambda_k - \nu_k \lambda_i + \nabla^0(\nu, \lambda)\, a_{ik}^0 \qquad (i, k = 1, 2); \\ &\nabla = e^{-2\lambda}\nabla^0 \quad , \quad \Delta = e^{-2\lambda}\Delta^0 \quad , \quad \Delta_2 = e^{-2\lambda}\Delta_2^0, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

dove sono contrassegnati con ^{0} gli elementi che si riferiscono al $d\sigma_0^2$.

[1] Questa affermazione cadrebbe in difetto soltanto se r fosse costante. Ma si può *a priori* escludere tale eventualità, badando alle equazioni (15). Infatti, per r costante, queste implicherebbero proporzionalità fra i coefficienti a_{ik} del $d\sigma^2$ e i prodotti $\nu_i \nu_k$, e quindi l'annullamento del discriminante, il che è da escludere, trattandosi di forma definita positiva.

Con ciò, le (13), (14), (15), avendo anche cura di sostituire a K la sua espressione (18), $-\Delta_2\lambda = -e^{-2\lambda}\Delta_2^0\lambda$, assumono l'aspetto

$$\Delta_2^0\nu + \frac{1}{r}\nabla(r\,,\nu) = 0\,. \tag{13'}$$

$$\Delta_2^0\lambda = -\Delta^0\nu\,, \tag{14'}$$

$$\frac{r_{ik}^0}{r} - \frac{r_i}{r}\lambda_k - \frac{r_k}{r}\lambda_i + 2\nu_i\nu_k - a_{ik}^0\left\{\Delta^0\nu - \frac{1}{r}\nabla^0(r\,,\lambda)\right\} = 0 \tag{15'}$$

$$(i\,,k = 1\,,2)\,.$$

4. — Particolarizzazione delle variabili indipendenti. Integrazione e forme canoniche.

Finora ci siamo occupati di cambiare la forma fondamentale, in modo che questa è divenuta il $d\sigma_0^2$ euclideo. Ma non abbiamo peranco introdotta alcuna specificazione delle variabili indipendenti $x_1\,,x_2$, sicchè le formule precedenti valgono in coordinate qualunque.

Per agevolare l'integrazione, giova però riferirsi a coordinate cartesiane (rispetto al nostro $d\sigma_0^2 = dr^2 + dz^2$), assumendo $x_1 = r\,,\ x_2 = z$. Con tali variabili indipendenti, $a_{ik}^0 = \varepsilon_{ik}$; le derivate covarianti coincidono con le derivate ordinarie, l'indice 1 significando derivazione parziale rapporto ad r e l'indice 2 derivazione parziale rapporto a z; $r_1 = 1\,,\ r_2 = 0\,,\ r_{ik}^0 = 0$ $(i\,,k = 1\,,2)$; ecc.

La (13') assume così la forma esplicita:

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} = 0\,, \tag{20}$$

in cui si ravvisa la nota equazione che definisce i potenziali simmetrici dello spazio ordinario in coordinate cilindriche.

Dunque, in primo luogo, *l'incognita* $\nu(r\,,z)$ *è un potenziale simmetrico.* Soddisfatta che sia questa condizione, le (15') risultano, come tosto verificheremo, compatibili e atte a individuare λ mediante una quadratura.

Per riconoscerlo, facciamo successivamente coincidere, nelle (15'), la coppia $(i\,,k)$ con $(1\,,1)$, $(2\,,2)$ e $(1\,,2)$.

Le prime due equazioni riescono coincidenti, sicchè si ricava

$$\lambda_1 = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\quad,\quad \lambda_2 = 2r\nu_1\nu_2\,, \tag{21}$$

le quali si compendiano in

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\,dr + 2r\nu_1\nu_2\,dz\,. \tag{21'}$$

In virtù della (20), il secondo membro risulta, come si constata immedia-

tamente, un differenziale esatto, sicchè le (21) sono compatibili, e *la determinazione di λ richiede unicamente una quadratura.*

Quanto alla (14') (che si presenta a primo aspetto come una ulteriore condizione imposta alla λ), essa rimane identicamente soddisfatta, purchè vi si introducano per λ_1, λ_2 le espressioni (21) e, ancora una volta, si tenga conto della (20).

Riassumendo, da (2), (3) *e* (17) *si ha l'espressione canonica dell'elemento lineare di spazio sotto la forma*

$$dl^2 = e^{-2\nu} \{ e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2 \}, \tag{22}$$

dove $\nu(r, z)$ è un potenziale simmetrico, cioè una qualunque soluzione della *equazione* (20), *e λ rimane individuata, una volta assegnato ν, a meno di una costante additiva inessenziale* (in quanto si possono far coincidere, con semplice alterazione dell'unità di lunghezza, ossia moltiplicazione di r e z per una medesima costante, due dl^2, i quali differiscono soltanto per la determinazione di λ). *Si ha poi* dalla (1) $V = V_0 e^{\nu}$, e quindi *il potenziale statico*

$$-\frac{1}{2} V^2 = -\frac{1}{2} V_0^2 e^{2\nu}.$$

Dacchè V_0 è una semplice costante di omogeneità, rimane provato che *ad ogni ordinario potenziale simmetrico ν corrisponde univocamente un ds^2 einsteiniano del tipo binario di Weyl.*

5. — Osservazione critica.

Il sig. Weyl, dopo aver impostata la questione con molta eleganza, ne deduce le equazioni differenziali caratteristiche da un principio variazionale, perfettamente corretto, ma solo parzialmente applicato. Ed ecco come.

La variazione di un certo integrale

$$\iint \mathfrak{H}\, dx_1\, dx_2$$

deve essere zero per incrementi arbitrari dei coefficienti g_{ik} del ds^2 einsteiniano, vincolati soltanto ad annullarsi al contorno del campo di integrazione.

Quando pur si sappia — ed è il caso di Weyl — che il ds^2, a partire dal quale la variazione si deve annullare, può essere assunto sotto forma ortogonale (anzi parzialmente isometrica)

$$f\, dt^2 - \{ h(dx_1^2 + dx_2^2) + l\, dx_3^2 \},$$

non basta limitarsi a variazioni che conservano quella forma, ma è d'uopo lasciare a priori arbitrarie tutte le δg_{ik}. Altrimenti si ottengono condi-

zioni che sono indubbiamente necessarie, ma che in generale non esauriscono il principio variazionale. Tale circostanza si presenta appunto nel detto caso, nel quale Weyl trova *tre sole equazioni algebricamente distinte*, equivalenti alle nostre (11′), (12′), (13′), mentre il procedimento completo ne fornirebbe *cinque*.

Le proprietà più importanti (armonicità di r, carattere di potenziale binario della ν) sono già incluse nelle tre equazioni del Weyl e da lui ben messe in luce. Egli enuncia altresì il risultato esatto che ad ogni potenziale simmetrico ordinario fa riscontro un ds^2 einsteiniano univocamente determinato, ma lo desume (pag. 39 della Memoria citata) da una addizionale condizione di regolarità in tutto lo spazio, che non è il caso di invocare, trattandosi di rispecchiare più generalmente il punto di vista differenziale, il quale richiede soltanto regolarità locale.

Per il confronto delle formule posso limitarmi a rilevare che, a meno di inessenziali costanti additive, le funzioni $\psi = \log \sqrt{f}$ e $\gamma = \log \sqrt{hf}$ di Weyl si identificano rispettivamente colle nostre ν e λ, coincidendo le equazioni (15) (per gli spazî vuoti) e (16) della Memoria di Weyl con (13′) e (14′). Le equazioni omesse da Weyl (per incompleto sfruttamento del principio variazionale) sono in sostanza le (21).

6. — Espressione delle curvature principali.

Indichiamo con ϱ il logaritmo di $\frac{r}{r_0}$, essendo r_0 una lunghenza costante (arbitraria) che si introduce per ragione di omogeneità. Da

$$\frac{r}{r_0} = e^{\varrho} \tag{23}$$

segue

$$\frac{r_i}{r} = \varrho_i \ (i = 1\,,2) \quad ; \quad \frac{1}{r}\nabla^0(r\,,\nu) = \nabla^0(\varrho\,,\nu), \text{ ecc.}$$

Usufruiremo di ϱ per brevità di scrittura, nel riportare al $d\sigma_0^2$ [cfr. n. 3] anche le espressioni (14) dei simboli di Ricci α_{ik} spettanti al nostro dl^2 spaziale. Eliminando dai secondi membri della (16) le ν_{ik} mediante le (19), si ha immediatamente

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha_{ik} = -\nu^0_{ik} + \nu_i\lambda_k + \nu_k\lambda_i - 3\,\nu_i\nu_k + a^0_{ik}\nabla^0(\nu - \lambda\,,\nu) \ (i\,,k = 1\,,2); \\ \alpha_{i3} = 0 \quad , \quad \alpha_{33} = r^2 e^{-2\lambda}\nabla^0(\nu - \varrho\,,\nu). \end{cases}$$

Dacchè il nostro dl^2 ha la forma ortogonale (22), ossia

$$e^{2(\lambda-\nu)}\,d\sigma_0^2 + r^2 e^{-2\nu}\,dx_3^2\,,$$

la solita equazione cubica, che determina le curvature principali, ammette intanto il fattore lineare $\alpha_{33} - \omega r^2 e^{-2\nu}$, e quindi la radice

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)} \nabla^0(\nu - \varrho\,,\, \nu)\,. \tag{25}$$

A questa prima conclusione si poteva arrivare anche osservando che il secondo membro della (22) rientra nel tipo considerato a § 4 della Nota III, talchè la curvatura principale ω_3 (quella corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$) si identifica colla curvatura gaussiana della forma binaria $e^{-2\nu} d\sigma^2 = e^{2(\lambda-\nu)} d\sigma_0^2$. Ciò porge

$$\omega_3 = - e^{-2(\lambda-\nu)} \Delta_2^0(\lambda - \nu)\,,$$

che coincide precisamente colla (25), in virtù di (13′) e (14′).

Le altre due curvature principali ω_1 e ω_2 rimangono definite dalla equazione quadratica

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega a_{11} & \alpha_{12} - \omega a_{12} \\ \alpha_{21} - \omega a_{21} & \alpha_{22} - \omega a_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{26}$$

Dacchè, come ben si sa, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ è conseguenza necessaria delle equazioni gravitazionali, la somma delle radici ω_1, ω_2 della equazione (26) vale $-\omega_3$. Quindi, mettendovi in evidenza come incognita $\omega + \frac{1}{2}\omega_3$, dovrà sparire il termine lineare. Ne segue che, ove si ponga

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik} + \tfrac{1}{2}\omega_3 e^{2(\lambda-\nu)} a_{ik}^0 = \alpha_{ik} + \tfrac{1}{2} a_{ik}^0 \nabla^0(\nu - \varrho\,,\, \nu)\,,$$

ossia, badando al primo gruppo delle (24),

$$\beta_{ik} = - \nu_{ik}^0 + \nu_i \lambda_k + \nu_k \lambda_i - 3\nu_i \nu_k + \tfrac{1}{2} a_{ik}^0 \nabla^0(3\nu - 2\lambda - \varrho\,,\, \nu)\,, \tag{27}$$

la (26) si riduce a

$$\beta + e^{4(\lambda-\nu)} a^0 \cdot (\omega + \tfrac{1}{2}\omega_3)^2 = 0\,, \tag{26'}$$

rappresentando β il determinante $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$ e a^0 quello delle a_{ik}^0 (discriminante del $d\sigma_0^2$).

Ne risulta, tenendo conto della (25), l'espressione comprensiva delle due curvature ω_1, ω_2 sotto la forma

$$\omega = e^{-2(\lambda-\nu)} \left\{ - \tfrac{1}{2} \nabla^0(\nu - \varrho\,,\, \nu) \pm \sqrt{\frac{-\beta}{a^0}} \right\}. \tag{28}$$

Importa rilevare che β *deve ritenersi essenzialmente diverso da zero* $\left(\text{e quindi negativo, affinchè riesca reale } \sqrt{\frac{-\beta}{a^0}}\right)$. Infatti, per $\beta = 0$, coinciderebbero le due curvature ω_1 e ω_2, e si ricadrebbe nel sottocaso B_2), già esaurito nelle Note precedenti. Si può domandare in modo preciso a

quale categoria di soluzioni B_2) corrisponde il valore limite $\beta = 0$. Ciò risulta agevolmente dal confronto del dl^2 [quale risulta dalle (2), (3)] coll'espressione che gli compete in generale nel caso B_2). Quest'ultima — aggiungo un asterisco per evitare ambiguità col $d\sigma$ della presente Nota — è $e^{2\tau}(d\sigma^{*2} + dx_3^2)$, dove $d\sigma^*$ sta a rappresentare (al pari di $d\sigma$) un elemento lineare binario indipendente da x_3, e $\tau = \nu + \zeta$, essendo ζ funzione della sola x_3. Dacchè ν ha identico significato nei due casi, perchè vi sia coincidenza, è intanto necessario che, anche nella B_2), esso risulti indipendente da x_3. Dal confronto dei due dl^2 per $dx_3 = 0$ segue allora che ζ deve ridursi ad una costante. Ora, nelle tre categorie di soluzioni B_2), ve n'è una e una soltanto — quella delle soluzioni quadrantali — in cui $e^{-\tau}$ non dipende da x_3. Concludiamo pertanto che *il caso particolare* $\beta = 0$ *riporterebbe alle soluzioni quadrantali colla specificazione* $\zeta =$ cost., ciò che implica [cfr. Nota VI, § 4] l'annullarsi della costante μ.

Chimica vegetale. — *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota III del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Nella nostra seconda Nota su questo argomento [1] abbiamo messo in rilievo che alcuni composti fondamentali per gli alcaloidi vegetali come la piridina, la piperidina e la xantina, non esercitano un'azione dannosa sulle piantine di fagiuoli, mentre quasi tutti gli alcaloidi naturali sperimentati e segnatamente fra questi la caffeina si mostrano velenosi. Appariva però opportuno di studiare l'azione dei derivati più prossimi di alcuni composti fondamentali e specialmente quelli metilati.

Noi abbiamo esaminato, a tale scopo, il contegno delle piantine di fagiuoli fatte crescere, come nelle nostre precedenti esperienze, sul cotone idrofilo, con una serie di sostanze opportunamente scelte; quando le piantine avevano raggiunto un certo grado di sviluppo venivano innaffiate colle rispettive soluzioni all'uno per mille; le basi furono impiegate allo stato di tartarati o di fosfati e si notò che questi ultimi esercitavano un'azione meno venefica dei primi. Così si può avere una graduazione nell'impiego delle basi tossiche giovandosi anche del fatto osservato l'anno scorso, che operando in germinatoi di zinco l'azione è meno intensa che in quelli di vetro.

Per accertare l'influenza dei gruppi metilici abbiamo anzitutto sperimentato le tre *ammine metilate:* la monometil, la dimetil e la trimetilammina tanto allo stato di tartarati che di fosfati. L'effetto fu quello pre-

[1] Questi Rendiconti, vol. XXVII, I, pag. 38.