ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

scire evidente con soluzioni ulteriormente fino a 50 e più volte allungate. Avremo occasione di ritornare diffusamente in argomento.

Desideriamo infine porre in rilievo che la prova indicata si presta utilmente e semplicemente per il dosaggio dell'adrenalina — e, del pari, come vedremo, di altri prodotti endocrini — e per controlli estemporanei dell'attività di sue soluzioni.

Analisi. — *Sull'iterazione di una speciale funzione.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

1. Recentemente il prof. Pincherle [1] ha considerato non più le solite quistioni di convergenza di iterazione, ma, su un esempio particolare, la distribuzione di punti « congruenti » rispetto all'iterazione (iterazione « in grande »).

In questa breve Nota esamineremo le stesse quistioni rispetto ad un'altra operazione; precisamente la

$$y = f(x) = x\alpha \pm \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\alpha^2}\,. \tag{1}$$

Si ottiene il risultato che, rispetto al parametro α, vi è un insieme ovunque denso sul segmento $(-1\,,\,+1)$ tale che l'insieme di punti congruenti ad uno, comunque scelto, sia formato da un numero finito e costante di punti, in dipendenza del valore scelto per α: in fondo alla Nota vi sono i risultati completi.

Supposto $x\,,y$ reali (e quindi $|x| \lesseqgtr 1$ con $|\alpha| \lesseqgtr 1$), noi vediamo che la curva definita da (1) è

$$y^2 + x^2 - 2xy\alpha = (1-\alpha^2)\,. \tag{2}$$

Se $|\alpha| < 1$, tale equazione dà un'ellissi, se $|\alpha| > 1$ un'iperbole i cui assi sono sulle bisettrici degli assi coordinati. La lunghezza dei semiassi è data da:

$$\sqrt{1-\alpha} \quad ; \quad \sqrt{1+\alpha}$$

rispettivamente sulle rette

$$y + x = 0 \quad ; \quad y = x\,.$$

L'iterazione avviene su tali coniche.

2. Chiameremo « conseguente » di un valore x_0, uno dei due valori x definiti da

$$x_1 = f(x_0)\,;$$

[1] Pincherle, *Sull'iterazione della funzione $x^2 - a$* (Rend. R. Acc. Lincei, serie 5ª, 1° sem., 1919, pp. 337-343.

Diremo invece « antecedente » di x_0 uno di quelli definiti da

$$x_0 = f(x).$$

Sulla curva (2) diremo perciò che un punto $P_0 \equiv (x_0 y_0)$ è antecedente di un punto $Q \equiv (x_1, y_1)$ se

$$x_1 = f(x_0)$$
$$y_0 = f(x_0) = x_1 \quad ; \quad y_1 = f(y_0) = f(x_1).$$

Quindi, due punti P e Q di cui il primo sia antecedente del secondo sulla curva sono dati da

$$P \equiv (x_0, x_1) \quad , \quad Q \equiv (x_1, x_2).$$

Tutti gli antecedenti e conseguenti di un valore x_0, i loro antecedenti e conseguenti, quelli di questi, e così via, formeranno l'insieme $[X_0]$ congruente con x_0.

Ci proponiamo appunto di studiare $[X_0]$ al variare di x_0 ed al variare di α (¹).

3. Chiamiamo antecedente negativo di x_0, e antecedente positivo (o conseguente), l'antecedente ottenuto dalla (1) scegliendo pel radicale il segno *meno* o il segno *più*. Si hanno allora i lemma:

LEMMA I: *L'antecedente positivo coincide con il conseguente negativo, e reciprocamente.*

LEMMA II: *L'antecedente di un qualsiasi punto congruente ad x_0, si può sempre ottenere come antecedente di x_0 stesso.*

Il lemma II si deduce subito dal primo: poichè questo dà appunto il legame che esiste fra antecedenti e conseguenti; e quindi la scelta alternativa di antec. e conseg. potrà ridursi alla scelta unica di antecedenti soli.

Per dimostrare il primo lemma, trasformiamo la (1). Poniamo

$$y = \cos\eta \quad ; \quad x = \cos\xi \quad ; \quad \alpha = \cos\theta\,;$$

poco importandoci se ξ, η, θ risultano reali o complessi.

Notiamo poi che ξ, η, θ restano determinati a meno di multipli di 2π ed a meno di π (trattandosi del coseno).

Sostituendo nella (1) avremo:

$$\cos\eta = \cos\xi \cos\theta \pm \operatorname{sen}\xi \operatorname{sen}\theta$$

(¹) Considerazioni simili e risultati analoghi a quelli che otterremo, si avrebbero per l'iterazione di $y = \dfrac{\alpha + x}{1 - \alpha x}$, ponendo $y = \operatorname{tg}\eta$, $\xi = \operatorname{tg}\xi$; $\alpha = \operatorname{tg}\theta$. Le curve ora scritte sono iperboli equilatere aventi gli assintoti paralleli agli assi ed il centro sulla bisettrice $y + x = 0$.

e quindi, a meno di multipli di 2π,

$$\eta_1 = \xi \mp \theta \quad , \quad \eta_2 = \xi \mp (\theta + \pi)$$

poichè θ è fissato a meno di π.

Quindi, ne deduciamo il lemma I; e si deduce ancora il

TEOREMA. *L'insieme* $[X_0]$ *dei punti* x *congruenti ad* x_0 *è dato da*

$$x'_r = \cos \xi'_r \quad ; \quad \xi'_r = \theta_0 + r\theta$$
$$x''_r = \cos \xi''_r \quad ; \quad \xi''_r = \theta_0 + r\theta + \pi .$$

4. Se θ è un angolo reale, si presentano due casi distinti:

1) θ è commensurabile con 2π, cioè $\theta = m/n . 2\pi$, con m, n primi fra loro.

2) θ è incommensurabile con 2π.

Nel primo caso, se cioè $\theta = m/n . 2\pi$, la successione di valori congruenti si compone sempre di un numero finito di punti, precisamente $2n$; e quindi si avranno $(4n)$ punti sull'ellissi, dati dalle coordinate

$$(x_0 , x_1) \ , \ (x_1 , x_2) , \ldots , (x_{n-1} , x_0) \qquad (x_r = x'_r \ ; \ x''_r) .$$

È chiaro che se, ad esempio, si scelgono sempre dei conseguenti positivi, la successione delle iterate non potrà tendere a nessun limite.

Passiamo al secondo caso: θ sia reale, non commensurabile con 2π. Allora non vi sarà nessun punto $\xi_0 + r\theta$, $\xi_0 + r\theta + \pi$ che possa coincidere con un altro, ed i punti ξ'_r, ξ''_r formeranno sull'asse ξ una successione di punti equidistanti.

In tal caso però i valori

$$\zeta'_r = \xi'_r - 2\pi \left[\frac{\xi'_r}{2\pi} \right] \quad ; \quad \zeta''_r = \xi''_r - 2\pi \left[\frac{\xi''_r}{2\pi} \right] ,$$

i quali dànno ad x'_r , x''_r lo stesso valore che ξ'_r , ξ''_r, formano un insieme ovunque denso nel tratto $(0 , 2\pi)$.

Infatti, date ζ e σ piccolo a piacere, si potranno sempre trovare due interi k, r tali che:

$$|(\xi_0 - \zeta) + (r\theta - k . 2\pi)| = |(\xi_0 + r\theta) - (\zeta + 2k\pi)| < \sigma .$$

Quindi, se x_0 è reale, i suoi congruenti formeranno un insieme ovunque denso sul segmento $(-1 , +1)$, perchè

$$x_r = \cos \xi_r = \cos \zeta_r .$$

Ed i punti P sull'ellissi assegnata formeranno un insieme egualmente denso ovunque.

Se ξ_0 fosse complesso e θ reale, avremmo

$$\xi_r = (\mu_0 + r\theta) + i\nu_0$$

ove si segni ξ_r per ξ'_r e ξ''_r, sostituendo a μ_0 il μ'_0 e $\mu''_0 + \pi$. Ma

$$\cos \xi_r = \cos (\mu_0 + r\theta) \cos i\nu_0 - \operatorname{sen} (\mu_0 + r\theta) \operatorname{sen} i\nu_0 =$$
$$= \cos (\mu_0 + r\theta) \operatorname{Ch} \nu_0 - i \operatorname{sen} (\mu_0 + r\theta) \operatorname{Sh} \nu_0$$

e si deduce facilmente che nel piano complesso $u + iv$ tali punti sono situati sull'ellissi

$$u = \cos \zeta \operatorname{Ch} (\nu_0) \qquad v = \operatorname{sen} \zeta \,.\, \operatorname{Sh} (\nu_0)$$

$$\left\{ \frac{u}{\operatorname{Ch} (\nu_0)} \right\}^2 + \left\{ \frac{v}{\operatorname{Sh} (\nu_0)} \right\}^2 = 1 .$$

Epperò se ne deduce ancora, per θ commensurabile, che, qualunque sia ξ_0 complesso, si hanno sempre $2n$ punti, mentre per θ incommensurabile si ha un insieme ovunque denso su tale curva.

5. Passiamo infine al caso di θ complesso; allora sarà

$$\xi_r = (\mu_0 + r\psi_0) + i(\nu_0 + r\psi_0) ,$$

e quindi

$$x_r = \cos \xi_r = \cos (\mu_0 + r\varphi_0) \operatorname{Ch} (\nu_0 + r\psi_0) - i \operatorname{sen} (\mu_0 + r\varphi_0) \operatorname{Sh} (\nu_0 + r\psi_0)$$

o ancora

$$x_r = \frac{1}{2} \left\{ e^{i(\mu_0 + r\varphi_0) - (\nu_0 + r\psi_0)} + e^{-i(\mu_0 + r\varphi_0) + (\nu_0 + r\psi_0)} \right\} .$$

E si vede che supposto, ad es., ψ_0 positivo, il primo termine tende all'infinito per r negativo, mentre il secondo tende a zero; e reciprocamente per r positivo.

Quindi se θ è complesso, i punti successivi se ne vanno all'infinito. Se α è reale, θ sarà imaginario puro.

Da tutto quanto precede risultano le seguenti proprietà:

Se le curve devono essere reali, α sarà reale.

Per $|\alpha| < 1$ si hanno ellissi di semiassi $\sqrt{1 + \alpha}$, $\sqrt{1 - \alpha}$ sulla prima e seconda bisettrice.

Per α reale compreso in tale intervallo vi è un insieme ovunque denso di valori, per cui $[X_0]$ si riduce ad un numero finito di punti; e precisamente per $\alpha = \cos \frac{2m\pi}{n}$, gli iterati d'un punto qualunque formano un poligono di $2n$ lati sulla curva.

Se $\alpha \neq \cos \frac{2m\pi}{n}$, gli iterati formano un insieme $[X_0]$ ovunque denso sulla curva; e quindi $[X_0] + [X_0]'$ coincide con la curva, se x_0 è reale.

Nel piano complesso tali valori dànno un insieme di $2n$ punti del segmento $(-1, +1)$ nel primo caso, un insieme ovunque denso nel secondo, se x_0 era reale. Nell'ipotesi che esso fosse complesso, si avrebbero rispettivamente $2n$ punti o un insieme ovunque denso sull'ellissi del piano complesso, data da

$$\frac{u^2}{\mathrm{Ch}^2 \nu_0} + \frac{v^2}{\mathrm{Sh}^2 \nu_0} = 1 .$$

Per $\alpha > 1$ si avranno iperboli aventi il semiasse reale sulla bisettrice $y = x$; per $\alpha < -1$ iperboli con il semiasse reale su $y + x = 0$. Gli iterati successivi hanno come punto limite unico l'infinito; e l'insieme $[X_0] + [X_0]'_0$ resta numerabile, mentre prima o era composto con un numero finito di punti, o con tutti i punti di un intervallo.

6. Un immediato esempio di quanto precede si ha per $\alpha = 0$, e quindi

$$\theta' = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta'' = \frac{3\pi}{2} .$$

L'ellissi diventa un cerchio; partendo da x_0 si avranno quattro punti sul cerchio, ad esso congruenti, perchè $n = 2$.

Infatti, posto

$$y = \sqrt{1 - x_0^2} ,$$

e dato x_0 si ottiene

$$x_1' = + \sqrt{1 - x_1^2} \quad ; \quad x_1'' = - \sqrt{1 - x_0^2}$$

$$\pm \sqrt{1 - (x_1')^2} = \pm x_0 = \pm \sqrt{1 - (x_1'')^2} \cdot$$

Quindi l'insieme $[X_0]$ è formato dai *quattro* punti $\pm x_0$, $\pm \sqrt{1 - x_0^2}$ e sul cerchio si hanno gli *otto* punti

$$(\pm x_0 , \pm \sqrt{1 - x_0^2}) \quad ; \quad (\pm \sqrt{1 - x_0^2}, \pm x_0) .$$