ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Le parallélisme de M.r Levi-Civita et la courbure riemannienne.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Cette Note est une contribution à l'étude du parallélisme dans une variété V_n à métrique quelconque, notion récemment introduite par M. Levi-Civita [1].

Soit x_i $(i = 1, 2, \dots n)$ un point de la variété V_n et

$$(f) \qquad ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

l'élement linéaire de cet espace. Soit ξ_i $(i = 1, 2, \dots n)$ un vecteur de cet espace ayant son origine en x_i (c'est-à-dire déterminant une direction de ce point); le déplacement de ce vecteur parallélement à lui-même, suivant une courbe G (nous dirons *translation* suivant G) est défini par les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{d\xi_k}{ds} + \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_\lambda}{ds} \xi_\mu = 0$$

qui définissent les ξ_k en fonction de l'arc s de la courbe donnée G. On sait qu'en général la nouvelle position de ξ_i après une translation, est *fonction de ligne* de G.

Si l'on effectue la translation suivant une courbe fermée infiniment petite Γ, partant d'un point M pour y revenir, les composantes ξ_i subissent des variations $\delta\xi_i$ que nous allons calculer [2].

[1] Cfr. dans les Rend. Palermo (1917), le deux Mémoires essentiels de M.r Levi-Civita et de M.r Severi.

[2] M. Levi-Civita a l'obligeance de me signaler, à propos de cette Note, un Mémoire de M. Schouten [Verh. K. Akad. Amsterdam, 1919] où est étudiée la même question (pp. 64-65).

La méthode de M. Schouten suppose seulement la courbe Γ particulière et constituée par un parallélogramme infiniment petit. Le calcul des $\delta\xi_i$ est alors aisé: M. Schouten utilise un symbolisme vectoriel très élégant,, mais assez complexe; si l'on revient aux notations plus classiques on 'constatera que le calcul à effectuer coïncide avec celui qui, au § 16 du Mémoire de M. Levi-Civita, le conduit à la formule (35); l'interprétation seule diffère.

La méthode que j'indique ici est nouvelle et me semble présenter certains avantages, elle ne donne pas lieu à des calculs plus longs que la précédente et conduit au calcul des $\delta\xi_i$ quelle que soit la forme de la courbe Γ.

2. Nous prendrons en M un élément plan P défini par deux vecteurs θ_i et ϱ_i et nous supposerons la courbe Γ tracée sur une surface, d'ailleurs quelconque, tangente à l'élément P.

M' (x'_i) étant un point quelconque de Γ, nous accentuerons ou non les diverses quantités $\left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\}$, $\delta\xi_i$, ... suivant qu'elles se rapportent à M' ou à M [1].

Les équations (1) donnent alors, pour déterminer $\delta\xi'_k$ le système

$$(2) \qquad \delta\xi'_k = -\int_{MM'} \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\}' dx'_\lambda (\xi_\mu + \delta\xi'_\mu),$$

équations intégrales que nous résoudrons par approximations successives, en ne gardant que les termes du 1er et du second ordre par rapport à ε (plus grande dimension de la courbe Γ). En supposant, ce qui n'est pas une restriction, les coordonnées de M nulles on a

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} x'_i + H\varepsilon^2$$

d'où

$$(2') \qquad \delta\xi'_k + \int_{MM'} \sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\}' \delta\xi'_\mu \, dx'_\lambda =$$

$$= -\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \xi_\mu x'_\lambda - \sum_{\lambda\mu i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \xi_\mu \int_{MM'} x'_i \, dx'_\lambda + H'\varepsilon^3,$$

d'où

$$(2'') \qquad \delta\xi'_k = -\sum_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} \xi_\mu x'_\lambda -$$

$$-\sum_{\lambda\mu i} \xi_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{\mu'} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu' \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i\mu \\ \mu' \end{matrix} \right\} \right] \int_{MM'} x'_i \, dx'_\lambda + H''\varepsilon^3,$$

d'où, après un tour complet, et en négligeant les infiniments petits du 3ème ordre,

$$(3) \qquad \delta\xi_k = -\sum_{\lambda\mu i} \xi_\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{\mu'} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu' \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i\mu \\ \mu' \end{matrix} \right\} \right] \int_\Gamma x'_i \, dx'_\lambda,$$

[1] Les ξ_i definissent donc la position initiale, en M, du vecteur; les $\xi_i + \delta\xi'_i$ sa position en M'; les $\xi_i + \delta\xi_i$ sa position finale en M, après la translation suivant Γ.

et, puisque

$$\int_\Gamma x'_i\, dx'_\lambda = -\int_\Gamma x'_\lambda\, dx'_i$$

$$(4) \qquad \delta\xi_k = -\sum_{i\lambda\mu}^{i<\lambda} \xi_\mu \{\mu k, \lambda i\} \int_\Gamma x'_i\, dx'_\lambda .$$

Les symboles de Riemann à quatre indices s'introduisent ainsi naturellement. Les intégrales qui figurent dans le second membre définissent, en grandeur et orientation l'aire de la courbe Γ. Elles sont proportionnelles à $\theta_i \varrho_\lambda - \varrho_i \theta_\lambda$ et la formule (4) s'écrit, δS etant l'aire de la courbe Γ

$$(5) \qquad \frac{\delta\xi_k}{\delta S} = -\frac{1}{A} \sum_{\lambda\mu i}^{i<\lambda} \xi_\mu \{\mu k, \lambda i\} (\theta_i \varrho_\lambda - \varrho_i \theta_\lambda)$$

avec

$$A^2 = \sum_{i\lambda, \mu h}^{i<\lambda, \mu<h} (a_{i\mu}\, a_{\lambda h} - a_{ih}\, a_{\lambda\mu}) (\theta_i \varrho_\lambda - \theta_\lambda \varrho_i) (\theta_\mu \varrho_h - \varrho_\mu \theta_h).$$

Si, *comme nous le supposerons désormais* (cette restriction n'a rien d'essentiel) on prend *les vecteurs* θ_i et ϱ_i *de longueur* 1, A est le sinus de leur angle.

3. Les formules (5) sont celles que j'avais en vue, on voit qu'elles définissent les variations $\delta\xi_k$ en fonction de l'orientation de l'élément P. Il est évident que les quantités $\dfrac{\delta\xi_k}{\delta S}$ sont des dérivées, au sens de la théorie des fonctions de lignes, des fonctions de lignes définies par les équations (1); en effectuant le calcul à partir de cette nouvelle définition on retrouve les formules (5) par une voie différente.

Le produit géométrique du vecteur $\delta\xi_k$ par un autre vecteur ζ_k est donné par la formule

$$(6) \qquad \sum_{hk} a_{hk}\, \zeta_h\, \delta\xi_k = \frac{\delta S}{A} \sum_{i\lambda, \mu h}^{i<\lambda, \mu<h} (\mu h, i\lambda) (\xi_\mu \zeta_h - \xi_h \zeta_\mu) (\theta_i \varrho_\lambda - \varrho_i \theta_\lambda)$$

à l'aide des symboles de Riemann ( ), il en résulte, en particulier, l'orthogonalité de ξ_k et $\delta\xi_k$.

Remarquons aussi que l'on déduira, de la simple inspection des formules (5) et (6), les propriétés essentielles des symboles } { et ( ) de Riemann.

4. Ce qui précède conduit aussi, naturellement à la notion de courbure Riemannienne.

Prenons pour vecteur ξ_i le vecteur θ_i, soient $\delta\theta_i$ les variations de ce vecteur après translation suivant la courbe Γ. Nommons enfin δH le produit géométrique des vecteurs $\delta\theta_i$ et ϱ_i. On vérifie immédiatement que la courbure de V_n suivant l'orientation P est l'invariant

$$K = \frac{\delta H}{A \delta S} . \tag{7}$$

Soit géométriquement, soit par un voie analytique, l'espression (7) de la courbure conduit aisément à l'interprétation suivante: prenous le vecteur ξ_i dans l'élément plan P; après translation suivant Γ il a tourné d'un certain angle et n'est plus, en général, dans P; soit $\delta\varepsilon$ la projection orthogonale de cet angle sur l'élément P; la courbure de V_n suivant l'orientation P est

$$K = \frac{\delta\varepsilon}{\delta S} .$$

Chimica. — *Preparazione e proprietà fisiche del dinitroglicol.* Nota II del dott. Annibale Moreschi, presentata dal Socio R. Nasini [1].

In una Nota precedente sono state esposte alcune proprietà del dinitroglicol; si rende ora conto delle proprietà di alcuni prodotti esplosivi che risultano dalla sua mescolanza con il nitrocotone. Per brevità si omettono alcuni dati tecnici che si riferiscono alla separazione del prodotto nitrato, al lavaggio, all'annegamento del miscuglio dopo la nitrazione, alla stabilità, dirò solo che la separazione è rapida (9'), la solubilità nel miscuglio piccola (0,17 %), la stabilità si aggira sui 30' al Saggio Abel.

Preparazione di galletta.

	N. 0	N. 1	N. 2
Nitrocotone N. 12,28 % gr.	300	300	300
Nitroglicol N. 18,38 %	—	50	200
Nitroglicerina »	200	150	—

Il contatto fra il nitrocotone e gli eteri nitrici si ottiene emulsionando gli eteri in acqua e facendoli pervenire sul nitrocotone tenuto sospeso da una viva agitazione in circa tre litri di acqua. Si opera ad una temperatura di 22° C. per il n. 2, e a 35° C. per gli altri due; dopo tre giorni di conservazione a circa 25° C. vengono liberati dalla gran parte dell'acqua, indi abbandonati ancora due giorni alla stessa temperatura.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio Chimico della Fabbrica di esplosivi Bombrini, Parodi-Defino. Segni-Scalo.