ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Geometria assoluta degli spazi curvi.* Nota I di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Facciamo le convenzioni seguenti: E_n, E_N sono due *spazi euclidei* ad n e N dimensioni $(3 \leq n \leq N)$; C_n è uno spazio *non euclideo* ad n dimensioni, immerso in E_N; Q è il punto generico di C_n (appartenente pure ad E_N, ma non viceversa); P è il punto generico di E_n.

Considerando i vettori infinitesimi dQ e l'operazione vettoriale $+$ in E_N, diremo che dQ è uno *spostamento infinitesimo* (un *differenziale arbitrario*) di Q in C_n, quando il punto $Q + dQ$ appartiene, oltre che ad E_N, anche a C_n. Essendo stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti di C_n e quelli di E_n, e al punto $Q_1 = Q + dQ$ di C_n corrispondendo il punto P_1 di E_n, diremo che *dP è, in E_n, lo spostamento corrispondente a dQ, quando $dP = P_1 - P$*; e al dP in E_n faremo corrispondere il dQ in C_n tale che $Q + dQ$ è il corrispondente di $P + dP$.

1. Traducendo in forma assoluta il concetto analitico ordinario di *spazio curvo*, diremo che C_n è uno spazio curvo ad n dimensioni $(n \geq 3)$ quando:

A) *Esiste almeno una corrispondenza biunivoca tra i punti P di E_n e i punti Q di C_n, tale che lo spostamento (arbitrario) dP in E_n abbia per corrispondente un dQ in C_n, e tale inoltre che i varii differenziali d, δ... di P siano tutti commutabili (in particolare $d\delta P = \delta dP$).*

B) *Se dQ è uno spostamento in C_n, l'elemento ds, distanza di Q da $Q + dQ$ in C_n, è pure la distanza dei medesimi punti in E_N, cioè $ds^2 = dQ \times dQ = dQ^2$, l'operazione $\times$ eseguendosi in E_N* (1).

Sia C_n uno spazio curvo, nel senso ora stabilito, individuato da una corrispondenza biunivoca [condizione A)], non importa quale, tra C_n ed E_n.

Essendo dP spostamento generico di P in E_n e dQ lo spostamento del corrispondente Q in C_n, poniamo:

$$(1) \qquad \beta = \frac{dQ}{dP}, \quad \text{e in conseguenza} \quad \beta^{-1} = \frac{dP}{dQ},$$

essendo così β un'omografia propria tra i vettori infinitesimi di E_n e quelli, pure infinitesimi, di C_n, e quindi β^{-1} omografia tra i vettori infinitesimi di C_n e quelli infinitesimi di E_n.

(1) Ciò si fa sempre per l'elemento ds di una *linea* o *superficie* ordinaria immersa in uno spazio a tre dimensioni.

Circa la teoria dei vettori ed omografie negli iperspazi, vedasi la recentissima Nota: Pensa, *Geometria assoluta dei vettori ed omografie in un S_n euclideo* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo; in corso di stampa).

Osservando che dalla (1) segue:

$$dQ \times dQ = \beta dP \times \beta dP = dP \times \mathrm{K}\beta \, . \, \beta dP,$$

e ponendo:

(2) $\alpha = \mathrm{K}\beta \, . \, \beta$, ($\alpha$ è dilatazione, perchè $\mathrm{K}\alpha = \alpha$),

per l'elemento ds di distanza si ha, da B):

$$ds^2 = dQ^2 = dP \times \alpha dP, \tag{3}$$

e quindi il quadrato dell'elemento ds in C_n si può calcolare in E_n mediante il prodotto interno di dP per αdP.

Così, e ciò è assai importante, *la metrica nello spazio curvo C_n si ottiene mediante la metrica dello spazio euclideo E_n, in base alla dilatazione α, che è data dalla corrispondenza biunivoca tra E_n e C_n che individua* [*condizione* A)] *lo spazio curvo C_n* (¹). Stabilita una corrispondenza biunivoca tra E_n e C_n è determinata β, e quindi è determinata α e anche la *metrica* di C_n che, in un certo senso, per la (3), è rappresentata dalla omografia α.

2. Sia stabilita una corrispondenza biunivoca tra i P di E_n e i Q di C_n e valgano le formule precedenti. Se, corrispondentemente allo spostamento, arbitrario, dP in E_n, si calcola l'incremento $d\beta$, si presenta spontanea una omografia che definiremo, per un vettore generico $\mathbf{u}$ di E_n, e per un'omografia qualunque λ, funzione di P, ponendo:

$$\Phi_{\mathrm{P}}(\lambda, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \lambda^{-1} \left\{ \frac{d\lambda}{dP} \mathbf{u} + \mathrm{S}_{\mathrm{P}}(\lambda, \mathbf{u}) - \mathrm{K}\,\mathrm{S}_{\mathrm{P}}(\lambda, \mathbf{u}) \right\}, \tag{4}$$

ove S è l'importante operatore binario per le omografie, dovuto al compianto M. Pieri (²). Ciò posto si ha:

$$d\beta = \beta \, . \, \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha, dP), \quad \text{od anche} \quad \frac{d\beta}{dP} \mathbf{u} = \beta \, . \, \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha, \mathbf{u}). \tag{5}$$

Infatti, differenziando la (2) si ha intanto

$$\mathrm{K}\beta \, . \, d\beta + \mathrm{K}(\mathrm{K}\beta \, . \, d\beta) = d\alpha; \tag{a}$$

poi, dalle formule [14], [12] del Pieri si trae (scrivendo per brevità S invece di S_{P}), badando alla (1):

$$d\beta = \mathrm{S}(\beta, dP) \quad , \quad \mathrm{K}\beta . d\beta = \mathrm{K}\beta . \mathrm{S}(\beta, dP) = \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta . \beta, dP) - \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta, \beta dP),$$

(¹) Introdotte le coordinate in E_N, E_n, C_n, il che noi non abbiamo bisogno di fare, il $dP \times \alpha dP$ non è altro che la ordinaria *forma quadratica differenziale f*.

(²) Burali-Forti et Marcolongo, *Transformations linéaires*, n. 48 (Mattei et C.^ie^, Pavie, a. 1912).

quindi per la (2):

$$(b) \qquad \mathrm{K}\beta\,.\,d\beta = \mathrm{S}(\alpha\,,\,dP) - \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta\,,\,\beta dP)\,;$$

si può dimostrare facilmente che l'ultimo termine è una dilatazione; perciò operando con K sulla (b) si ha:

$$(c) \qquad \mathrm{K}(\mathrm{K}\beta\,.\,d\beta) = \mathrm{KS}(\alpha\,,\,dP) - \mathrm{S}(\mathrm{K}\beta\,,\,\beta dP)\,.$$

Se ora alla (a) si aggiunge la differenza fra la (b) e la (c), e si tien conto della posizione (4), si ha senz'altro:

$$\mathrm{K}\beta\,.\,d\beta = \alpha\,.\,\Phi_{\mathrm{P}}(\alpha\,,\,dP)\,;$$

operando sui due membri con $\mathrm{K}\beta^{-1}$ e osservando che dalla (2) segue $\beta = \mathrm{K}\beta^{-1}\,.\,\alpha$, risulta la (5).

3. Applichiamo subito la (5) alla ricerca delle linee *geodetiche* di C_n, la cui equazione differenziale è, in E_n;

$$(6) \qquad P'' + \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha\,,P')\,P' = 0 \qquad (P' = dP/ds)\,.$$

Come d'uso, diremo che una linea da A a B (punti fissi di C_n) è geodetica, sia in C_n, che in una varietà V_m $(m \leq n)$ immersa in C_n, quando

$$(a) \qquad \delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{mod}\, dQ = 0\,.$$

Ora si ha facilmente: $\delta(\mathrm{mod}\, dQ) = (d\delta Q/\mathrm{mod}\, dQ) \times dQ$, e se prendiamo come variabile indipendente l'arco s della linea, nel qual caso $\mathrm{mod}(dQ/ds) = 1$, la (a) diviene:

$$(b) \qquad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\delta Q \times Q' = 0 \qquad (Q' = dQ/ds)\,.$$

Integrando per parti, la (b) risulta soddisfatta solo quando $\int \delta Q \times Q''\, ds = 0$ per δQ arbitrario in C_n, cioè solo quando

$$(c) \qquad \delta Q \times Q'' = 0\,,$$

la quale esprime anche che: *la linea da A a B è geodetica della varietà V_m immersa in C_n quando la normale principale in Q (la cui direzione è data da Q'') è normale a tutte le direzioni δQ della V_m uscenti da Q* [1].

L'equazione differenziale delle geodetiche è dunque la (c). Ora dalla (1) segue: $Q' = \beta P'$, onde $Q'' = \beta P'' + \beta' P'$, ossia, per la (5):

$$Q'' = \beta\,\{ P'' + \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha\,,P')\,P' \}\,,$$

quindi la (c) diventa:

$$\beta\delta P \times \beta\,\{P'' + \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha, P')\,P'\} = 0\,, \quad \text{onde} \quad \delta P \times \alpha\,\{P'' + \Phi_{\mathrm{P}}(\alpha, P')\,P'\} = 0\,;$$

[1] Questa proprietà può essere assunta per definizione, perchè le (a), (c) sono equivalenti.

ma δP è arbitrario in E_n, ed α è invertibile, quindi ne risulta la (6).

4. Esaminiamo alcune proprietà fondamentali dei simboli finora introdotti.

Operando con δ sulla $dQ = \beta dP$ si ha, per la (5):

$$(a) \qquad \delta dQ = \delta\beta \, . \, dP + \beta \, . \, \delta dP = \beta \, \{ \Phi_P(\alpha \, , \delta P) \, dP + \delta dP \} \, ,$$

e quindi risulta la formula:

$$(7) \qquad \delta dP + \Phi_P(\alpha \, , \delta P) \, dP = \beta^{-1} (\delta dQ) \, ,$$

il cui 1° membro *non* può essere identicamente nullo per $d \, , \delta$ arbitrarî.

L'omografia Φ definita dalla (4) gode della proprietà notevolissima, espressa dalla formula:

$$(8) \qquad \Phi_P(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} = \Phi_P(\alpha \, , \mathbf{v}) \, \mathbf{u} \, , \qquad (\mathbf{u} \, , \mathbf{v} \text{ vettori arbitrarî}).$$

Infatti, applicando la formula [2] del Pieri, e la proprietà, assai facile da dimostrare, espressa da $\mathrm{KS}(\mathrm{D}\gamma \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} = \mathrm{KS}(\mathrm{D}\gamma \, , \mathbf{v}) \, \mathbf{u}$, ove γ è omografia qualunque, risulta dalla (4):

$$\begin{aligned} 2\alpha\Phi(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} &= \mathrm{S}(\alpha \, , \mathbf{v}) \, \mathbf{u} + \mathrm{S}(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} - \mathrm{KS}(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} = \\ &= \mathrm{S}(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \mathbf{v} + \mathrm{S}(\alpha \, , \mathbf{v}) \, \mathbf{u} - \mathrm{KS}(\alpha \, , \mathbf{v}) \, \mathbf{u} \, , \end{aligned}$$

e quindi, per la stessa (4), ne segue la (8).

Se ora nella (7) scambiamo d e δ, teniamo conto della (8), e della $d\delta P = \delta dP$ [condizione A)], si ricava subito:

$$(9) \qquad d\delta Q = \delta dQ \, ,$$

cioè d e δ sono commutabili anche nel campo in cui varia Q (non lo sarebbero però i simboli $d' \, , d \, , \delta$ di tre spostamenti di Q).

5. Una nuova omografia, dipendente da due vettori $\mathbf{u} \, , \mathbf{v}$ e che definiremo ponendo

$$\begin{aligned} (10) \qquad \Theta(\alpha \, , \mathbf{u} \, , \mathbf{v}) = {} & \frac{d\Phi(\alpha \, , \mathbf{u})}{dP} \, \mathbf{v} - \frac{d\Phi(\alpha \, , \mathbf{v})}{dP} \, \mathbf{u} + \\ & + \Phi(\alpha \, , \mathbf{v}) \, \Phi(\alpha \, , \mathbf{u}) - \Phi(\alpha \, , \mathbf{u}) \, \Phi(\alpha \, , \mathbf{v}) \, , \end{aligned}$$

(ove, per brevità, abbiamo omesso l'indice P a Θ e a Φ), si presenta spontanea nel calcolo di $\delta d\beta - d\delta\beta$. Infatti, calcolando $\delta d\beta$ dalla (5), e sostituendo a $\delta\beta$ il valore dato dalla (5) stessa, si ha:

$$\delta d\beta = \beta\Phi(\alpha \, , \delta P) \, \Phi(\alpha \, , dP) + \beta \, . \, \delta\Phi(\alpha \, , dP) \, ;$$

scambiando d con δ, sottraendo e tenendo conto della (10) si ottiene:

$$(11) \qquad \delta d\beta - d\delta\beta = \beta \, . \, \Theta(\alpha \, , dP \, , \delta P) \, .$$

Potendo considerarsi dP come un vettore costante, si ha, tenendo conto delle (1), (9):

$$(\delta d\beta - d\delta\beta) \, dP = \delta d(\beta dP) - d\delta(\beta dP) = \delta d dQ - d\delta dQ = \delta d^2 Q - d^2\delta Q \, ,$$

e quindi, per la (11):

$$\delta d^2 Q - d^2 \delta Q = \beta \,.\, \Theta(\alpha \,, dP \,, \delta P)\, dP. \tag{12}$$

6. Applichiamo ora l'omografia Θ al calcolo della curvatura di Riemann nel punto Q, e secondo una data giacitura.

Sia Σ una superficie di C_n, passante per Q, e siano $dQ \,, \delta Q$ due spostamenti ortogonali, tangenti a Σ in Q; allora per la curvatura $\mathcal{K}$ di Gauss di Σ in Q è noto che [1]

$$m^2 \mathcal{K} = m\, \delta \left(\frac{\delta Q \times d^2 Q}{m} \right) - md \left(\frac{\delta Q \times d\delta Q}{m} \right), (m = \text{mod}\, dQ \,.\, \text{mod}\, \delta Q). \tag{13}$$

Eseguendo le differenziazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} m^2 \mathcal{K} &= \delta Q \times \delta d^2 Q - \delta Q \times d^2 \delta Q + \\ &+ [d^2 Q \times \delta^2 Q - (d\delta Q)^2] - \{ \delta m \,.\, \delta Q \times d^2 Q - dm \,.\, \delta Q \times d\delta Q \} / m \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Supponiamo che la Σ sia la superficie formata dalle geodetiche di C_n uscenti da Q e tangenti ai vettori $x dQ + y \delta Q$ ($x \,, y$ numeri reali arbitrarî); diciamo poi $\mathbf{N}$ il vettore unitario normale a Σ in Q, ed $s \,, s_1$ (con s_1 funzione arbitraria di s) gli archi delle geodetiche tangenti, in Q, a dQ e δQ. Trattandosi di geodetiche, le loro normali principali in Q hanno la direzione del vettore $\mathbf{N}$, e, facendo uso delle solite notazioni, si ha:

$$\frac{dQ}{ds} = \mathbf{t} \;, \quad \frac{d^2 Q}{ds^2} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{N} \;, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dQ}{ds_1} \right) = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{1}{\varrho_1} \frac{ds_1}{ds} \mathbf{N} \,,$$

$$\frac{dQ}{ds_1} = \mathbf{t}_1 \;, \quad \frac{d^2 Q}{ds_1^2} = \frac{1}{\varrho_1} \mathbf{N} \;, \quad \frac{d}{ds_1} \left(\frac{dQ}{ds} \right) = \frac{d\mathbf{t}}{ds_1} = \frac{1}{\varrho} \frac{ds}{ds_1} \mathbf{N} \,;$$

di qui risulta che l'ultimo termine della (14) si annulla e che, per la (9), il 2° termine vale $[1/(\varrho\varrho_1) - 1/(\varrho\varrho_1)]\, ds^2\, ds_1^2 = 0$.

Quindi, per la superficie geodetica Σ considerata, la (14) porge:

$$m^2 \mathcal{K} = \delta Q \times (\delta d^2 Q - d^2 \delta Q) \,,$$

e poichè si può scrivere $m^2 = dQ^2 \,.\, \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2$, si ha pure

$$\mathcal{K} = \delta Q \times (\delta d^2 Q - d^2 \delta Q) / [dQ^2 \,.\, \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2] \,. \tag{15}$$

Poichè $dQ = \beta dP$, ed $\alpha = \mathrm{K}\beta \,.\, \beta$, applicando la (12) si può dare alla (15) la forma, equivalente a quella di Riemann:

$$\mathcal{K} = \delta P \times \alpha \Theta(\alpha, dP, \delta P)\, dP / \{ dP \times \alpha dP \,.\, \delta P \times \alpha \delta P - (dP \times \alpha \delta P)^2 \} \tag{16}$$

La (15) vale anche quando agli spostamenti ortogonali $dQ \,, \delta Q$ si sostituiscano spostamenti qualunque, esprimibili linearmente mediante i dQ e δQ ortogonali ora considerati.

[1] Burali-Forti, *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie* ecc., n. 42 (Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIII, 1° sem., 1912).