ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Classe derivata di una funzione.* — Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Siano: u una classe di numeri reali relativi contenente più di un elemento; f il simbolo di una funzione numerica, monodroma, definita nel campo u e che applicata ad un qualsiasi elemento di u produce un numero reale relativo; x un elemento di u appartenente pure alla classe derivata, ∇u, di u [1].

Se per y elemento generico della classe formata dagli u diversi da x, cioè della classe $u - \iota x$, poniamo

[1] $$\varphi y = (fy - fx)/(y - x),$$

[1] Per comodo del lettore, e per non lasciare dubbî sulla natura dell'ente nuovo che intendo definire, riporto le definizioni di alcuni enti fondamentali già noti, valendomi delle notazioni logico-ideografiche del *Formulario* di G. Peano, con le leggiere modificazioni che ho introdotto nella 2ª ediz. del mio Manuale Hoepli, *Logica Matematica*, in corso di stampa e di prossima pubblicazione.

Unendo, somma logica, alla classe q dei numeri reali relativi gli elementi $+\infty$, $-\infty$ si ottiene la classe

(0) $$q^* = q \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty).$$

Di una classe u, non vuota, di q se ne deve considerare il *limite superiore*, $l'u$; il *limite inferiore*, $l_1 u$; la *classe limite generale*, Λu; la *classe derivata generale*, ∇u, e si ha:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'}\,q \,.\, \exists u \therefore \supset_u \therefore$$

(1) $$\exists \{u - (u - Q)\} : \supset : l'u \,.=.\, \bar{\iota}\{q \cap x \ni (x - Q = u - Q)\}$$

(1′) $$- \exists \{u - (u - Q)\} : \supset : l'u \,.=.\, +\infty$$

(2) $$\exists \{u - (u + Q)\} : \supset : l_1 u \,.=.\, \bar{\iota}\{q \cap x \ni (x + Q = u + Q)\}$$

(2′) $$- \exists \{u - (u + Q)\} : \supset : l_1 u \,.=.\, -\infty$$

(3) $$\Lambda u \,.=.\, q^* \cap x \ni \exists_{\iota}[\mathrm{Cls'}\,u \cap v \ni \{\exists v : x = l'v \,.\cup.\, x = l_1 v\}]$$

(4) $$\nabla u \,.=.\, q^* \cap x \ni \{x \varepsilon \Lambda(u - \iota x)\}.$$

Per una funzione f definita nel campo u, ed essendo x un elemento di ∇u, se ne deve considerare « la classe dei valori limiti di f quando la variabile *varia* in u e *tende* ad x », $\mathrm{Lim}(f, u, x)$, e, se esiste, il « limite della funzione f quando la variabile *varia* in u e *tende* ad x », $\lim(f, u, x)$, e si ha:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'} \cap \mathrm{Cls'}\,q \,.\, f \varepsilon \mathrm{Ops}(u, q) \,.\, x \varepsilon \nabla u \therefore \supset_{u,f,x} \therefore$$

(5) $$\mathrm{Lim}(f, u, x) \,.=.\, q^* \cap a \ni \{v \varepsilon \mathrm{Cls'}\,q \,.\, \exists v \,.\, x - \varepsilon \nabla v \,.\supset_v.\, a \varepsilon \Lambda f'(u - \iota x - v)\}$$

(6) $$\mathrm{Lim}(f, u, x) \varepsilon \mathrm{Cls}_1 \,.\supset.\, \lim(f, u, x) = \bar{\iota}\,\mathrm{Lim}(f, u, x).$$

Il $\lim(f, u, x)$, limite ordinario, esiste quando la classe limite, $\mathrm{Lim}(f, u, x)$, contiene un solo elemento (è una Cls_1), il che si verifica quando coincidono il limite superiore ed inferiore della classe $\mathrm{Lim}(f, u, x)$ che, lo si noti bene, *esiste sempre*.

Per le proprietà degli enti (1)-(6) e per la completa ed esatta analisi delle varie accezioni del concetto di *limite*, si consulti il *Formulario* già citato e i lavori fondamentali del Peano indicati nel tomo V, del 1906, a pag. 215.

φ è una funzione, dipendente da f, u, x, e definita nel campo degli u diversi da x che, come d'uso, chiamasi « rapporto incrementale di f nel campo u per il valore x ».

Essendo x un elemento della « classe derivata degli u diversi da x », $\nabla(u - \iota x)$, possiamo considerare la classe, sempre esistente, dei « valori limiti di φ quando la variabile *varia* nel campo degli $u - \iota x$ e *tende* ad x », cioè la classe

[2] $$\mathrm{Lim}\,(\varphi\,,\, u - \iota x\,,\, x)\,.$$

È appunto la classe [2], ente che finora non è stato considerato esplicitamente, che intendiamo definire e che proponiamo di chiamare « classe derivata di f nel campo u per il valore x » e indicare col simbolo composto *completo*

[3] $$\mathrm{Cls\,D}\,(f\,,\, u\,,\, x)\,.$$

Se la classe [3], o la [2] che equivale, contiene *un solo elemento*, questo è la *ordinaria* « derivata di f nel campo u per il valore x », che si indica col simbolo composto *completo*,

[4] $$\mathrm{D}\,(f\,,\, u\,,\, x)\,.$$

Esprimendo in simboli si ha

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}' \cap \mathrm{Cls}'u \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{Ops}\,(u\,,\,\mathrm{q}) \,.\, x \,\varepsilon\, u \cap \nabla u : \supset_{u,f,x} :$$

[5] $$\mathrm{Cls\,D}\,(f\,,\, u\,,\, x) \,.\!\equiv\!.\, \mathrm{Lim}\left\{ \frac{fy - fx}{y - x} \,\middle|\, y\,,\, u - \iota x\,,\, x \right\}$$

[6] $$\mathrm{Cls\,D}\,(f\,,\, u\,,\, x) \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}_1 : \supset : \mathrm{D}\,(f\,,\, u\,,\, x) \cdot\!\equiv\!\cdot\, \imath\, \mathrm{Cls\,D}\,(f\,,\, u\,,\, x)\,,$$

e queste forme simboliche fanno vedere chiaramente la necessità (*omogeneità della definizione*) degli indici f, u, x per la *classe derivata* e per la *derivata* ordinaria, quando esiste.

Nelle ipotesi fatte, la $\mathrm{Cls\,D}\,(f, u, x)$ *esiste sempre*; se essa ha *un solo elemento*, cioè il suo limite superiore coincide col suo limite inferiore, allora, e solo allora, esiste la ordinaria $\mathrm{D}\,(f, u, x)$. Quindi la frase comune « la f manca di derivata nel campo u per il valore x » si riduce a questa: « la $\mathrm{Cls\,D}\,(f, u, x)$, sempre esistente, contiene più di un elemento, è una Cls' »; vale a dire le funzioni mancanti, nel senso ordinario, di *derivata*, sono quelle per le quali la $\mathrm{Cls\,D}\,(f, u, x)$, sempre esistente, contiene più di un elemento.

Definita così la $\mathrm{Cls\,D}\,(f, u, x)$ se ne possono studiare le proprietà, certo numerose ed interessanti, e che, indubbiamente, devono semplificare assai le ricerche sulle funzioni mancanti di ordinaria derivata [1]. Ma io non posso compiere tale lavoro. Posso, peraltro, e voglio, esprimere un vivo desiderio.

Il libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* [2] del compianto Maestro U. Dini, contiene resultati bellissimi e di grande importanza scientifica, resultati che sono poco noti e che sarebbe, non solo utile, ma doveroso, per onorare la memoria del grande Maestro, esporre di nuovo, valendosi delle attuali forme che hanno tanto semplificato il linguaggio ed eliminate alcune ipotesi restrittive [3]. La Cls $D(f, u, x)$ ha come *limite superiore* e *inferiore* ciò che il Dini chiama, nel campo delle derivate, *estremi oscillatori*. Ora è facile vedere come si devono esprimere sotto forma molto semplice gli importanti teoremi del Dini valendosi della Cls $D(f, u, x)$, sempre esistente, e che, in speciali condizioni, dà pure l'ordinaria $D(f, u, x)$ quando questa esirte.

Possa qualche giovane valente e volenteroso accogliere l'invito che ho fatto; sarò lieto di aver contribuito, molto indirettamente, ad onorare la memoria del grande Maestro.

Meccanica. — *Su certi problemi dinamici sul piano.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una Memoria inserita nel vol. II, serie II, an. 1857, pp. 113-140, del Giornale di Liouville, il Bertrand stabilì che, pel movimento di un punto libero in un piano, sono possibili integrali primi (lineo-frazionarii nelle componenti x', y' della velocità) della forma [4]

$$(1) \qquad \alpha = (Py' + Qx' + R)(Ay' + Bx' + C)^{-1} \qquad (\alpha \text{ cost. arb.})$$

se P, Q, R, A, B, C sono le seguenti funzioni delle coordinate x, y del punto [5]:

$$(2) \qquad P = k + lx \;,\; Q = g - lx \quad ; \quad A = k' + l'x \;,\; B = g' - l'x$$

[1] Si può collegare con alcuni miei precedenti lavori: *Sulle classi derivate a destra e a sinistra* (Atti Acc. Torino, vol. XXIX, a. 1894); *Sul limite delle classi variabili* (Ibidem, vol. XXX, a. 1895); *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles...* (Math. Annalen, B. 47, a. 1895).

[2] Edito a Pisa dalla Tipografia Nistri e C. nel 1878.

[3] Alcuni, ma non molti, dei risultati ottenuti dal Dini, si trovano nel *Formulario* di G. Peano ridotti alle forme moderne più semplici di quelle che si sono presentate per le prime nel grande lavoro della ricerca delle *basi* del calcolo differenziale.

[4] Cfr. § VII, pp. 131-136 ove è cercato se possono esistere integrali di tale forma con $P, Q, \ldots$ funzioni delle sole coordinate del punto.

[5] Cfr. § VIII, pp. 137-140 dove si cerca quali sono i problemi corrispondenti agli integrali della forma (1) nelle ipotesi (2) (3). Su questo soggetto comparve nel mese di