ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ricerche sulle funzioni mancanti di ordinaria derivata [1]. Ma io non posso compiere tale lavoro. Posso, peraltro, e voglio, esprimere un vivo desiderio.

Il libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* [2] del compianto Maestro U. Dini, contiene resultati bellissimi e di grande importanza scientifica, resultati che sono poco noti e che sarebbe, non solo utile, ma doveroso, per onorare la memoria del grande Maestro, esporre di nuovo, valendosi delle attuali forme che hanno tanto semplificato il linguaggio ed eliminate alcune ipotesi restrittive [3]. La Cls $D(f, u, x)$ ha come *limite superiore* e *inferiore* ciò che il Dini chiama, nel campo delle derivate, *estremi oscillatori*. Ora è facile vedere come si devono esprimere sotto forma molto semplice gli importanti teoremi del Dini valendosi della Cls $D(f, u, x)$, sempre esistente, e che, in speciali condizioni, dà pure l'ordinaria $D(f, u, x)$ quando questa esirte.

Possa qualche giovane valente e volenteroso accogliere l'invito che ho fatto; sarò lieto di aver contribuito, molto indirettamente, ad onorare la memoria del grande Maestro.

Meccanica. — *Su certi problemi dinamici sul piano.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una Memoria inserita nel vol. II, serie II, an. 1857, pp. 113-140, del Giornale di Liouville, il Bertrand stabilì che, pel movimento di un punto libero in un piano, sono possibili integrali primi (lineo-frazionarii nelle componenti x', y' della velocità) della forma [4]

$$(1) \qquad \alpha = (Py' + Qx' + R)(Ay' + Bx' + C)^{-1} \qquad (\alpha \text{ cost. arb.})$$

se P, Q, R, A, B, C sono le seguenti funzioni delle coordinate x, y del punto [5]:

$$(2) \qquad P = k + lx \;,\; Q = g - lx \;;\; A = k' + l'x \;,\; B = g' - l'x$$

[1] Si può collegare con alcuni miei precedenti lavori: *Sulle classi derivate a destra e a sinistra* (Atti Acc. Torino, vol. XXIX, a. 1894); *Sul limite delle classi variabili* (Ibidem, vol. XXX, a. 1895); *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles...* (Math. Annalen, B. 47. a. 1895).

[2] Edito a Pisa dalla Tipografia Nistri e C. nel 1878.

[3] Alcuni, ma non molti, dei risultati ottenuti dal Dini, si trovano nel *Formulario* di G. Peano ridotti alle forme moderne più semplici di quelle che si sono presentate per le prime nel grande lavoro della ricerca delle *basi* del calcolo differenziale.

[4] Cfr. § VII, pp. 131-136 ove è cercato se possono esistere integrali di tale forma con $P, Q, \ldots$ funzioni delle sole coordinate del punto.

[5] Cfr. § VIII, pp. 137-140 dove si cerca quali sono i problemi corrispondenti agli integrali della forma (1) nelle ipotesi (2) (3). Su questo soggetto comparve nel mese di

$$(3)\qquad \begin{cases} R = (G'y - K'x + L')\,(G''y - K''x + L'')^{-1} \\ C = (Gy - Kx + L)\,(G''y - K''x + L'')^{-1} \end{cases}$$

ove g, k, l ; g', k', l' ; g'', k'', l'' sono costanti da scegliere arbitrariamente, e G, K, L ; $G', \ldots$; $G'' \ldots$ sono rispettivamente i minori complementari di $g, k, \ldots$ nel determinante

$$(4)\qquad H = \begin{vmatrix} g & k & l \\ g' & k' & l' \\ g'' & k'' & l'' \end{vmatrix}.$$

In tale ipotesi, lo stesso Bertrand stabilì che il movimento ha luogo sotto l'azione di forze le cui componenti X, Y secondo gli assi sono

$$(5)\qquad X = \frac{H(l''x + k'')}{(G''y - K''x + L'')^3}\ ,\quad Y = \frac{H(l''y - g'')}{(G''y - K''x + L'')^3}\ ^{(1)},$$

rilevando pure che fra X ed Y ha luogo la relazione (che qui scriviamo in forma intiera) immediata

$$(6)\qquad X(l''y - g'') - Y(l''x + k'') = 0\,;$$

dalla quale si deduce *senz'altro* che *i movimenti in discorso, nella ipotesi di* $H \neq 0$ [2], *sono movimenti che hanno luogo sotto l'azione di forze centrali col centro di forza nel punto*

$$(7)\qquad x_0 = -k'' : l''\ ,\quad y_0 = g'' : l''$$

---

giugno scorso (fasc. 11°, pag. 391 di questi medesimi Rend.) una Nota col titolo: *Problemi dinamici a due variabili che ammettono* ecc. del dott. De Cristoforo. Ciò che era già, da tempo, a noi noto in relazione all'argomento, l'importanza dei rapporti di esso con i problemi classici di moto libero per sezioni coniche quali vengono qui messi in rilievo ed altri motivi di carattere puramente scientifico, spiegano l'origine della presente comunicazione (in due brevi Note) che venne redatta sin dal mese di agosto 1918. Circa le (2), (3) si osservi poi che, nelle formule date dal Bertrand, compaiono le lettere B, D, D' che noi abbiamo creduto sostituire con l'', $-g''$, $-k''$ per motivi di simmetria, e per evitare il duplice significato della B.

[1] Nelle espressioni delle X, Y quali si trovano date dal Bertrand in fine della Memoria, comparisce il fattore $(K'x - G'y + L')^2$ che, evidentemente, è superfluo. Inoltre, è da notarsi che, nella espressione di X, al posto di $Bx + D'$, deve figurare $Bx - D'$, e che, per accordare la relazione fra X ed Y con le (17), (18) del Bertrand, a pag. 139, occorre ancora un cambiamento di segno.

[2] Questa restrizione si presenta necessaria alla semplice ispezione delle (5) e senza di essa diversi risultati non avrebbero, nel fatto, alcun significato. L'esame esauriente del problema richiede, adunque, nel caso in cui per un integrale della forma (1), sia $H = 0$, una trattazione a parte; la quale sarà oggetto, speriamo, di una nostra ulteriore comunicazione.

se $l'' \neq 0$; *ovvero, sono movimenti sotto l'azione di forze parallele alla direzione fissa* $-g'' : k''$, *se* $l'' = 0$.

Mettendo in vista il centro di forza, ed indicando con

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

la sua distanza dal punto mobile, si vede che alla forza stessa può darsi, nel primo caso, la forma

$$F = \frac{l''H}{\sqrt{(G''^2 + K''^2)^3}} \cdot \frac{r}{p^3}, \tag{8}$$

ove p è la distanza del mobile dalla retta (presa positivamente quando il mobile e la origine sono dalla stessa parte della retta)

$$G''y - K''x + L'' = 0, \tag{9}$$

mentre, nel secondo, può scriversi

$$F = H \sqrt{\frac{g''^2 + k''^2}{(G''^2 + K''^2)^3}} \frac{1}{p^3} \tag{10}$$

Così, *i movimenti domandati circa la forma* (1) *di un integrale primo, e nella ipotesi* $H \neq 0$, *sono quelli che hanno luogo per sezioni coniche secondo la legge* (prima forma) *scoverta da Hamilton* [1], cioè *per forze direttamente proporzionali alla distanza dal centro di forza ed inversamente proporzionali al cubo della distanza da una retta fissa, nel caso in cui questa non passa per un tal centro* [2]; ovvero *sono i movimenti per forze parallele inversamente proporzionali al cubo della distanza da una retta fissa.* — Nel 1° caso le traiettorie sono coniche rispetto alle quali il centro di forza e la retta fissa sono un polo e la relativa polare; nel 2° (che può ritenersi incluso sul 1°) *le traiettorie sono coniche rispetto alle quali la retta fissa è il diametro coniugato alla direzione costante della forza*; e, in entrambi i casi, quali che siano le circostanze iniziali.

[1] Cfr. Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. III, 1846. — Alle due leggi per movimenti centrali liberi lungo sezioni coniche, oltre al nome di Hamilton, sono collegati, come è noto, quelli di Villarceau (1852), di Darboux e Halphen (1877), di Battaglini (1877) per moti liberi in generale; di Glaisher (1878), di Appel (1889-90, 1891) e di altri. — Appell informa che *tali leggi furono dedotte dall'Halphen da quelle dell'attrazione proporzionale alla distanza o inversamente proporzionale al quadrato della distanza, con una trasformazione come quella da lui adoperata* (*un'omografia*; Bulletin de la Société Philomatique de Paris, 7ª serie, tomo I, pag. 89), e di cui noi discorriamo al n. 2 del presente lavoro.

[2] Infatti, se al posto di x, y nel primo membro della (9) poniamo i valori (7), troviamo $G''g'' : l'' + K''k'' : l'' + L'' = (G''g'' + K''k'' + L''l'') : l'' = H : l'' \neq 0$ perchè $H \neq 0$ ed l'' è finito.

2. *Le due leggi rappresentate dalle* (8), (10) *furono dedotte*, nel 1889, *dall'Appell, dalla legge per forza centrale proporzionale alla distanza dal centro di forza* [1] *col mezzo dell'omografia* (non degenere)

$$(11) \qquad x_1 = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}$$

accompagnata dalla trasformazione (del tempo t nel tempo t_1)

$$(12) \qquad k dt_1 = \frac{dt}{(a''x + b''y + c'')^2} \qquad (k = \text{cost} \neq 0)$$

[la particolarità $c = c' = 0$ che introduce Appell nel caso della (8), e quella di $c = 0$ nel caso della (10) non sono essenziali, essendo in dipendenza esclusiva della scelta dell'origine e dell'asse delle y]. Infatti, identificando la matrice a dritta di (4) con la

$$(4') \qquad \begin{vmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{vmatrix},$$

e quindi H con $-\Delta$ [determinante della (4')] l'*Appell trova come trasformato del movimento sotto l'azione della forza* μr ($\mu =$ cost. ed r distanza dal centro di forza) il movimento sotto l'azione della forza

$$F_1 = \frac{\mu_1 r_1}{(G''y - K''x + L'')^3} \quad \text{con} \quad \mu_1 = -k^2 l'' \mu H^3$$

che, quando per k^2 si prenda $-1 : \mu$ (ovvero, scelta k, si trasformi la forza μr con $\mu = 1 : k^2$) coincide con la (8) [cfr. Mem. cit. dell'Appell, pag. 107, es. I]. Con la medesima identificazione, quando, oltre a $c'' = 0$ [cioè ad $f'' = 0$ se ci riferiamo alla H] sia $c = 0$, lo stesso Appell *trova* [loc. cit., pag. 118, es. III] *come forza nel moto trasformato la*

$$\frac{\mu_1}{(G''y - K''x + L'')^3} \quad \text{con} \quad \mu_1 = k^2 l'' \mu H^3$$

che, a sua volta, prendendo per k^2 il valore $\sqrt{g''^2 + k''^2} : l'\mu$ coincide con la (10). Dai risultati dell'Appell, confrontati con quelli conclusivi delle ricerche di Bertrand, si può dunque dedurre che *i problemi dinamici ai quali può competere un integrale della forma* (1) *e pei quali sia* $H \neq 0$, *sono problemi per forze centrali o per forze parallele secondo le formule* (8), (10), *e possono tutti essere ottenuti trasformando con le omografie non de-*

[1] Cfr. la Memoria *De l'homographie en Mécanique*, nell'American Journal of Mathematics, vol. XII, pag. 107, esempî I e III; nella quale trovasi pure accennato (pp. 103 e 108) quanto abbiamo testè riferito, in fine della nota ([5]) circa l'Halphen. — Cfr. pure, dell'Appell, l'art. *Sur les lois des forces centrales* etc., idem, vol. XIII, an. 1891, pag. 153. Questi confronti riusciranno istruttivi in relazione all'argomento di cui è oggetto il presente scritto.

generi del piano i movimenti per forze centrali proporzionali alla distanza dal centro di forza (i quali ultimi fanno parte pure essi dei movimenti del tipo).

3. Quando, per una scelta determinata delle costanti $g, h, l, \ldots$ da cui dipende l'integrale (1), il problema dinamico corrispondente (eccezion fatta, s'intende, delle condizioni iniziali) è stato determinato, l'*omografia di Appell* (11)-(12) [1] che serve a dedurlo dal moto centrale per forza proporzionale alla distanza, sarà chiamata *omografia coordinata* all'integrale (1), o al problema corrispondente; essa trasformerà le coniche concentriche che sono traiettorie nel primo problema, nelle coniche (dotate del medesimo polo, e relativa polare, nel nuovo centro di forza e nella *retta limite* del sistema trasformato) che sono traiettorie nel secondo problema, il tempo di passaggio del secondo mobile per la posizione corrispondente a quella del primo, essendo regolato dalla formula

$$t_1 = \frac{H^2}{h} \int (G'' y_1 - K'' x_1 + L'')\, dt,$$

Indicando con Ω_1, Ω_2 le omografie coordinate a due dei problemi del tipo, la Ω_1^{-1} trasforma il primo in un problema di moto per forza centrale proporzionatamente alla distanza; questo (con eventuale modifica della costante di proporzionalità) viene trasformato da Ω_2 nel secondo problema; dunque, dal primo problema si passa al secondo con la omografia $\Omega_1^{-1}\Omega_2$ che è, del resto, arbitraria. Se ne conclude che *tutti i problemi dinamici, cui possono competere integrali della forma* (1) *con* $H \neq 0$, *possono essere derivati da uno qualunque fra essi trasformandolo con le omografie di Appell.* In particolare, se la scelta dell'omografia coordinata ad uno dei problemi del tipo è fatta in guisa che le traiettorie nel moto trasformato abbiano il nuovo centro di forza per fuoco e, per retta limite, la direttrice corrispondente [ciò che equivale a fare la scelta delle costanti $g, k, l \ldots$ subordinatamente alla condizione

$$\sqrt{(l'x + f'')^2 + (l''y + g'')^2} = \lambda l'' (G''y - K''x + L''),$$

con $\lambda = \text{cost} =$ al prod. di $\sqrt{G''^2 + K''^2}$ per l'*eccentricità* della traiettoria], la (8) prenderà la forma

$$F = \frac{l'' H \lambda^3}{r^2} = \frac{\lambda_1}{r^2}, \qquad (\lambda_1 = \text{cost.})$$

cioè la legge della forza sarà la newtoniana; e si potrà perciò enunciare:

Tutti i problemi dinamici cui può competere un integrale della forma (1) *con* $H \neq 0$, *possono essere ottenuti trasformando con le omografie di Appell* (del piano o dello spazio) *il movimento naturale dei pianeti.*

[1] Così noi proponiamo che, per brevità, venga chiamata ogni omografia del tipo (11) accompagnata dalla trasformazione (12), sia che si tratti, come qui, del piano, sia che si abbia ad operare nello spazio.