# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.*

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).


Matematica. — *Sopra una disuguaglianza fra i generi di una superficie algebrica.* Nota II di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1]

4. Pertanto le rette di K sono tutte appoggiate ad un $S_{n-t}$ con $t \geq 3$. Supposto per semplicità (e come del resto è lecito a meno di una sostituzione lineare sulle $u$) che si tratti dello spazio $y_1 = y_2 = \cdots = y_t = 0$, avremo anzitutto

$$u_2 = f_2(u_1)\,,\ u_3 = f_3(u_1)\,, \ldots,\ u_t = f_t(u_1)\,,$$

e quindi

$$\text{(5)} \qquad X_{2i} = f'_2(u_1)\,X_{1i}\,,\ X_{3i} = f'_3(u_1)\,X_{1i}\,, \ldots,\ X_{ti} = f'_t(u_1)\,X_{1i}\,, \quad (i = 2, 3, \ldots, n+1).$$

Delle relazioni (1), le prime $\binom{t}{2}$ possono identificarsi con quelle che esprimono la mutua dipendenza delle $u_1, u_2, \ldots, u_t$, cioè colle

$$X_{12} = X_{13} = \cdots = X_{1t} = X_{23} = \cdots = X_{t-1,t} = 0\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1919.

e le altre $m - \binom{t}{2}$ possono scriversi sotto la forma

$$(6) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1} X_{1i}\left(a_{1i}^{(\nu)} + a_{2i}^{(\nu)} f'_2(u_1) + \cdots + a_{ti}^{(\nu)} f'_t(u_1)\right) + \sum b_{rs}^{(\nu)} X_{rs} = 0\,,$$

dove gli indici $r, s$ sono ambedue maggiori od eguali a $t+1$. Il numero dei termini del secondo sommatorio è dunque $\binom{n-t+1}{2}$; e siccome la differenza fra il numero delle equazioni (6) e il numero di quei termini $\left[\text{tenuto conto che } m > \binom{n-1}{2}\right]$ risulta $\geq (t-2)\,(n-1-t)$, così, finchè $2 < t < n-1$, si potranno dalle (6) eliminare linearmente le $X_{rs}$ del secondo sommatorio, giungendo ad almeno una relazione lineare del tipo

$$(7) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1} X_{1i}\left(c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right) = 0\,,$$

nella quale le $c$ son costanti. È da notare che la (7) è una effettiva relazione fra le $X_{1i}$ giacchè, se tutte le $c$ fossero nulle, le relazioni (6) risulterebbero linearmente dipendenti; e se fossero identicamente nulli i coefficienti delle $X_{1i}$, se ne dedurrebbe per integrazione la dipendenza lineare degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_t$.

Ora, con semplici calcoli formali, si vede che la (7) esprime l'annullarsi dello jacobiano delle due funzioni

$$u_1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=t+1}^{n+1}\left[c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right] u_i\,,$$

e quindi se ne ricava che

$$(8) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1}\left[c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right] u_i = F(u_1)\,,$$

F essendo simbolo di funzione.

Qui basta ragionare come al numero precedente. Detta C una curva del fascio irrazionale a cui *appartengono* gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_t$; detto $c$ il valore di $u_1$ lungo C, e posto ancora

$$c_{1i} + c_{2i} f'_2(c) + \cdots + c_{ti} f'_t(c) = k_i \quad , \quad F(c) = h\,,$$

si deduce dalla (8) che, lungo C,

$$\sum_{i=t+1}^{n+1} k_i u_i = h\,,$$

e quindi, pel teorema citato di de Franchis, che l'integrale del 1° membro *il quale è indipendente da* $u_1, u_2, \dots, u_t$, è costante lungo le curve del fascio, cioè è funzione di $u_1$.

Ma allora, aggregando alle $t$ funzioni $u_1, u_2, \dots, u_t$ la $(t+1)^a$ ora trovata, si deduce che le rette di K sono appoggiate ad un $S_{n-t-1}$ contenuto nello $S_{n-t}$ da cui siamo partiti; e poichè il ragionamento può seguitarsi finchè $t < n-1$, così si conclude che tutte le rette di K sono appoggiate ad una retta o passano per un punto. E si vede facilmente, bastando perciò fermarsi all'esistenza di un $S_{n-2}$ singolare, che a tal conclusione conducono anche i casi $n = 2, 3$; se poi $n = 1$, il risultato è evidente.

Proviamo ora che se le rette di K si appoggiano ad una retta e non passano per un punto, esse si appoggiano di conseguenza ad un $S_{n-2}$ sghembo con essa. E invero se $t = n-1$ le relazioni (6) si riducono ad una sola, la quale è del tipo

$$(9) \quad X_{1n}\Big(a_1 + a_2 f'_2(u_1) + \cdots + a_{n-1} f'_{n-1}(u_1)\Big) + \\ + X_{1n+1}\Big(b_1 + b_2 f'_2(u_1) + \cdots + b_{n-1} f'_{n-1}(u_1)\Big) + c X_{nn+1} = 0.$$

Se ora si pone

$$v_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1}, \quad v_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_{n-1} u_{n-1}, \\ v_3 = u_3, \dots, v_{n+1} = u_{n+1},$$

e si conservano per gli jacobiani delle $v$ le stesse notazioni che per quelli delle $u$, la (9) assume la forma

$$X_{1n} + X_{2n+1} + c X_{nn+1} = 0,$$

e, presa insieme alla $X_{12} = 0$, ci riporta al caso $n = 3$ per le quattro funzioni $v_1, v_2, v_n, v_{n+1}$.

Ora, se $n = 3$, lo spazio T è una retta, e la $W_{2(n-1)}$ una quadrica di $S_5$; e dei due punti comuni, uno corrisponde alla relazione $X_{12} = 0$. Se T è tangente a W, si ha $c = 0$; e allora il ragionamento fatto sopra è valido anche per $t = n-1$, conducendo alla conclusione che le rette di K passano tutte per un punto; se T non è tangente a W, l'altra sua intersezione dà un'ulteriore relazione funzionale fra due combinazioni lineari di $v_1, v_2, v_n, v_{n+1}$ che si potrà supporre ridotta alla forma $v_{n+1} = f(v_n)$, e dimostra la verità dell'asserto.

Si conclude dunque in definitiva che *le superficie algebriche d'irregolarità* $q = p_g - p_a > 0$, *per cui* $p_g \geq 2(p_a + 2)$ *possiedono un fascio irrazionale di genere* $p = q - \varepsilon$ $(\varepsilon = 0, 1, 2)$ *e un altro fascio di genere* $q - p$.

5. Vediamo ora di precisare maggiormente il risultato ottenuto. Perciò osserviamo che, se $p_a < 0$, la diseguaglianza $p_g \geq 2(p_a + 2)$ è verificata dalle rigate di genere $> 1$ $(p_a < -1, p = q)$ e dalle superficie ellittiche con $p_g > 1$ $(p_a = -1, p = q - 1)$; e soltanto in questi casi.

Supposto dunque $p_a \geq 0$ ed escluso il caso delle superficie con un fascio di curve ellittiche $[p^{(1)} = 1, p = q$ (Enriques)$]$, avremo $p_g \geq 4$, e sulla F esisterà il sistema canonico *irriducibile* di dimensione $\geq 3$. Applicando la formula di Zeuthen alla $\gamma^1_{2\pi-2}$ segata sopra una curva canonica dalle curve, di genere $\pi$, del fascio di genere $p$, avremo $p^{(1)} \geq 2(p-1)(\pi-1)+1$, e, per la nota formula di Castelnuovo-Enriques

$$\mathrm{I} \geq 4(p-1)(\pi-1) - 4 .$$

In virtù della relazione di Nöther $p^{(1)} + \mathrm{I} = 12\,p_a + 9$, se ne ricava

$$p_a \geq (p-1)\frac{\pi - 1}{2} - 1,$$

e infine, tenendo conto che

$$p_g \geq 2(p_a + 2), \quad p = q - \varepsilon,$$

viene

$$(p-1)\frac{\pi - 3}{2} + 2 - \varepsilon \leq 0,$$

cioè $\pi \leq 2$; ovvero, se $\pi = 3$ o $p = 1$, $\varepsilon = 2$. Ma questi ultimi casi si escludono rapidamente in varî modi [1]; e poichè le ipotesi $\pi = 0, 1$ conducono ai casi già considerati, potremo soltanto supporre $\pi = 2$. Allora un ragionamento esposto da Rosenblatt al n. 7 della sua citata Nota di Palermo permette rapidamente di concludere che dev'essere $\varepsilon = 2$, e quindi si cade sulla superficie delle coppie di punti di due curve di generi $p_a + 2, 2$ [2].

In definitiva le conclusioni a cui siam pervenuti possono riassumersi negli enunciati seguenti:

I. *Il genere geometrico d'una superficie algebrica di genere aritmetico* $p_a \geq 0$, *non contenente fasci di curve ellittiche* $(p^{(1)} \geq 1)$, *non può*

[1] Per esempio si osservi che, se $\pi = 3$ o $p = 1$, in tutte le formule precedenti vale il segno $=$ e quindi $p_a = p - 2$, $\mathrm{I} = 4(p-1)(\pi-1) - 4$. Ne segue che le curve del fascio di genere $p$ non hanno punti doppî: e quindi, se $p > 1$, hanno tutte il genere 3. Su esse le curve dell'altro fascio, che ha il genere 2, debbono segare una $\gamma'_2$ priva di punti doppî e quindi la nostra superficie è rappresentabile doppiamente *senza curva di diramazione* sulla superficie delle coppie di punti di due curve di generi $p$, 2. Ma allora dalle formule di Severi segue $p_a = 2p - 3 = p - 2$, quindi $p = 1$, $p_a = -1$: il che è assurdo, perchè in tal caso è $\varepsilon = 1$. L'ipotesi $p = 1$ conduce analogamente a $p_a = -1$ e quindi alla stessa conclusione.

[2] Il procedimento di Rosenblatt è stato da me modificato, ma la tirannia dello spazio mi vieta di entrare nei particolari di tale variante.

*superare* $2(p_a+2)$, *e il limite superiore è raggiunto per ogni valore di* $p_a$ *dalla superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2, 2$.

II. *Le superficie algebriche per cui* $p_g \geq 2(p_a+2)$ *appartengono ai tipi seguenti*:

a) *rigate di genere* $>1$ $(p_g=0\,,\, p_a<-1\,,\, p=p_g-p_a)$;

b) *superficie ellittiche di genere geometrico* $p_g>1$ $(p_a=-1\,,\, p=p_g-p_a-1=p_g)$;

c) *superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2, 2$ $(p_g=2(p_a+2)\,,\, p=p_g-p_a-2=p_a+4)$;

d) *superficie di genere lineare* $p^{(1)}=1$ $(p=p_g-p_a)$.

In quest'ultimo caso la disuguaglianza $p_g \geq 2(p_a+2)$ non è però necessariamente verificata, come nei casi precedenti.

Meccanica. — *Le equazioni alle variazioni, per cause perturbatrici variabili, nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

Si abbia la funzione di linea

$$x = x \left| \left[ t\,,\, \varphi_1 \overset{T}{\underset{0}{(t)}}\,,\, \varphi_2 \overset{T}{\underset{0}{(t)}}\,,\, \dots\,,\, \varphi_\nu \overset{T}{\underset{0}{(t)}} \right] \right| ;$$

le funzioni $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots,\varphi_\nu$ ricevano gli incrementi $\psi_1(t)\,,\psi_2(t)\,,\dots,\psi_\nu(t)$. Si ponga, per un fissato valore di $t$,

$$X(\sigma_1\,,\sigma_2\,,\dots,\sigma_\nu) = x\left|\left[t\,,\,\varphi_1(t)+\sigma_1\psi_1(t)\,,\dots,\varphi_\nu(t)+\sigma_\nu\psi_\nu(t)\right]\right|,$$

ove $\sigma_1\,,\sigma_2\,,\dots,\sigma_\nu$ sono dei parametri arbitrarî. Per le ricerche compiute dal Volterra [2], fin dal 1887, sulle funzioni di linea, parmi lecita l'*induzione* che si possa sempre in pratica riguardare come prima approssimazione dell'incremento della funzione $x$ la sua *variazione prima*

$$\delta x = \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_2}\right)_0 + \cdots + \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_\nu}\right)_0 ,$$

ove con $\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_i}\right)_0$ abbiamo indicato il valore della derivata $\frac{\partial X}{\partial \sigma_i}$ per

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_\nu = 0 .$$

In questo concetto di variazione prima per una funzione di linea è possibile, *mediante sole quadrature*, approssimare le perturbazioni di un moto,

(1) Pervenuta il 30 settembre 1919.

(2) Volterra, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* [questi Rendiconti, 2° semestre 1887, pp. 97-105].