# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

*superare* $2(p_a+2)$, *e il limite superiore è raggiunto per ogni valore di* $p_a$ *dalla superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2, 2$.

II. *Le superficie algebriche per cui* $p_g \geq 2(p_a+2)$ *appartengono ai tipi seguenti*:

a) *rigate di genere* $>1$ $(p_g=0, p_a<-1, p=p_g-p_a)$;

b) *superficie ellittiche di genere geometrico* $p_g>1$ $(p_a=-1, p=p_g-p_a-1=p_g)$;

c) *superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2, 2$ $(p_g=2(p_a+2), p=p_g-p_a-2=p_a+4)$;

d) *superficie di genere lineare* $p^{(1)}=1$ $(p=p_g-p_a)$.

In quest'ultimo caso la disuguaglianza $p_g \geq 2(p_a+2)$ non è però necessariamente verificata, come nei casi precedenti.

Meccanica. — *Le equazioni alle variazioni, per cause perturbatrici variabili, nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

Si abbia la funzione di linea

$$x = x\,|[t\,,\, \overset{T}{\underset{0}{\varphi_1(t)}}\,,\, \overset{T}{\underset{0}{\varphi_2(t)}}\,,\, \dots\,,\, \overset{T}{\underset{0}{\varphi_\nu(t)}}]|\,;$$

le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ ricevano gli incrementi $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_\nu(t)$. Si ponga, per un fissato valore di $t$,

$$X(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu) = x\,|[t\,,\, \varphi_1(t)+\sigma_1\psi_1(t)\,,\, \dots\,,\, \varphi_\nu(t)+\sigma_\nu\psi_\nu(t)]|\,,$$

ove $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ sono dei parametri arbitrarî. Per le ricerche compiute dal Volterra [2], fin dal 1887, sulle funzioni di linea, parmi lecita l'*induzione* che si possa sempre in pratica riguardare come prima approssimazione dell'incremento della funzione $x$ la sua *variazione prima*

$$\delta x = \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_2}\right)_0 + \dots + \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_\nu}\right)_0,$$

ove con $\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_i}\right)_0$ abbiamo indicato il valore della derivata $\frac{\partial X}{\partial \sigma_i}$ per

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_\nu = 0\,.$$

In questo concetto di variazione prima per una funzione di linea è possibile, *mediante sole quadrature*, approssimare le perturbazioni di un moto,

[1] Pervenuta il 30 settembre 1919.

[2] Volterra, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* [questi Rendiconti, 2° semestre 1887, pp. 97-105].

dovute a cause perturbatrici che siano assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità, non appena sia noto un sistema di perturbazioni relative ad un certo sistema di parametri del moto, dovute cioè a cause perturbatrici che dirò *parametriche.*

Ciò mostrerò in questa Nota.

In Note ulteriori poi applicherò la teoria generale al calcolo delle perturbazioni del moto dei proietti d'artiglieria, dovute a cause perturbatrici e variabili da punto a punto lungo la traiettoria e parametriche (1). Queste applicazioni saranno esposte qui quasi solamente nei loro risultati, mentre la loro completa esposizione, particolareggiata anche nei riguardi delle pratiche approssimazioni numeriche, trovasi in lavori che usciranno nella Rivista d'Artiglieria e Genio del Ministero della Guerra (2).

Si riesce, in particolare, al calcolo delle perturbazioni nel moto del proietto, provocate da vento comunque variabile lungo la traiettoria. Con tale risultato viene per la prima volta risoluto razionalmente il problema, posto dalla pratica del tiro in guerra, del calcolo delle correzioni da apportare al tiro, a causa del vento. Si riconosce facilmente, dopo ciò (cfr. i citati lavori nella Rivista d'Artiglieria e Genio), che la soluzione empirica di questo problema, adottata durante la guerra dalle artiglierie francesi (3) ed inglesi e proposta dal Borel, è fondata sopra due ipotesi in contradizione.

1. Le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano costituite dai parametri da cui univocamente dipende la posizione di un sistema materiale S e da talune velocità. Siano poi $\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n)$, $\nu$ assegnate funzioni del tempo $t$ e delle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$.

L'indice $i$ prenderà in seguito sempre i valori $1, 2, \dots, n$; gl'indici $l$ e $r$ i valori $1, 2, \dots, \nu$.

Il moto di S sia definito dal seguente sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1, \dots, x_n; \dots, \varphi_l(t, x_1, \dots, x_n), \dots], \\ x_i(0) = x_i^{(0)}, \end{cases}$$

dove le $f_i$ sono note funzioni degli $n + \nu + 1$ argomenti $t, x_i, \varphi_l$.

Per l'intervento di cause perturbatrici variabili, assegnate in funzione del tempo, del posto e di talune velocità, le funzioni $\varphi_l$ ricevano gli incre-

(1) Il calcolo delle perturbazioni dovute a cause perturbatrici parametriche fu già da me trattato nella Nota: *Formole razionali per la correzione del tiro* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, febbraio 1917].

(2) Una prima esposizione meno completa di ciò ho già fatto nelle mie Tavole di tiro da montagna [Fascicolo IB, *Teoria e metodi di compilazione*] pubblicate dal Comando della 6a Armata e adottate da questa e dal I e V Corpo d'Armata.

(3) Cfr. la pubblicazione del Ministero della Guerra francese: *Instruction sur le tir d'artillerie,* 2me fascicule p. 19 [Paris, Imprimérie nationale, novemb

menti $\psi_l$, noti in funzione di $t$ e delle $x_i$; si tratta di calcolare, in funzione di $t$, le corrispondenti variazioni prime delle $x_i$, di calcolare cioè le perturbazioni del moto di S. Indichiamo con $X_i$ la funzione $x_i$, corrispondente allo stesso valore del tempo e alle funzioni $\chi_l = \varphi_l + \sigma_l \psi_l$, ove le $\sigma_l$ sono $\nu$ parametri arbitrarî. Le $X_i$ riescono definite dal seguente sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{dX_i}{dt} = f_i[t, X_1, \dots, X_n; \dots, \varphi_l(t, X_1, \dots, X_n) + \sigma_l \psi_l(t, X_1, \dots, X_n), \dots], \\ X_i(0) = x_i^{(0)}. \end{cases}$$

Poniamo $\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}\right)_0 = \xi_{ir}(t)$; le variazioni prime delle quantità $x_i$, che ci proponiamo di calcolare, sono date da

$$\delta x_i = \xi_{i1}(t) + \xi_{i2}(t) + \cdots + \xi_{i\nu}(t).$$

Deriviamo rispetto a $\sigma_r$ [1] ambo i membri delle equazioni (2), si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_r} = \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \chi_l}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial X_k} + \sigma_l \frac{\partial \psi_l}{\partial X_k}\right)\right]\frac{\partial X_k}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial f_i}{\partial \chi_r}\psi_r,$$

$$\left[\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}\right]_{t=0} = 0.$$

Se in queste equazioni facciamo $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_r = 0$, osservando che, posto

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \chi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial X_k}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}\right)_0 = \alpha_{ik}(t),$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \chi_r}\psi_r\right)_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_r}\psi_r\right)_0 = \beta_{ir}(t).$$

le funzioni $\alpha_{ik}(t)$, $\beta_{ir}(t)$ riescono note funzioni di $t$, si trova che le funzioni $\xi_{ir}(t)$ soddisfano, ciò che le definisce completamente, al seguente sistema di equazioni differenziali lineari e di condizioni iniziali:

$$(3)\begin{cases} \dfrac{d\xi_{1r}}{dt} = \alpha_{11}\xi_{1r} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_{nr} + \beta_{1r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\xi_{nr}}{dt} = \alpha_{n1}\xi_{1r} + \cdots + \alpha_{nn}\xi_{nr} + \beta_{nr}, \\ \xi_{1r}(0) = \cdots = \xi_{nr}(0) = 0. \end{cases}$$

[1] È ben noto (cfr., per esempio, Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III), che se, come supponiamo, le funzioni $f_i$ e le loro derivate $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial \varphi_l}$ sono continue nel dominio che occorre considerare, le funzioni $X_i$ definite dalle (2) sono continue e possiedono le derivate $\dfrac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}$ continue, in un dominio nel quale basta rimanere perchè sia legittimo il procedimento del testo.

Questo sistema è appunto quello delle *equazioni alle variazioni per le cause variabili, perturbanti il moto di S (assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità), alle quali competono gli incrementi $\psi_i$ delle funzioni $\varphi_i$.*

Il sistema (3), ridotto omogeneo,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n, \tag{4}$$

è quello delle equazioni alle variazioni [1] relative a variazioni di parametri del moto che non compaiono esplicitamente nelle equazioni differenziali (1). Onde il teorema:

*Noto un sistema di n perturbazioni del moto, linearmente indipendenti, dovute a variazioni di n parametri che non compaiono esplicitamente nelle equazioni differenziali del moto, si calcolano mediante sole quadrature le perturbazioni dovute a cause perturbatrici variabili, che siano cioè assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità.*

2. Nelle equazioni differenziali dei moti della meccanica celeste, ed in generale della meccanica applicata, è raro che i parametri $x_i^{(0)}$, che fissano le condizioni iniziali, compaiano esplicitamente nelle equazioni differenziali. Se ci mettiamo in questa ipotesi, il sistema di derivate

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i^{(0)}}, \frac{\partial x_2}{\partial x_i^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_i^{(0)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

costituisce appunto un sistema completo di integrali fondamentali per il sistema omogeneo (4), il cui determinante, per $t = 0$, ha gli elementi della diagonale principale eguali ad *uno*, e gli altri nulli. Si ha dunque che:

*Se nelle equazioni differenziali del moto non compaiono esplicitamente i parametri che fissano le condizioni iniziali, noto il sistema delle n perturbazioni dovute, ciascuna, alla variazione di uno solo degli indicati parametri, si calcola mediante sole quadrature la perturbazione dovuta ad una qualunque causa perturbatrice variabile.*

3. A proposito delle equazioni alle variazioni (4) è interessante un'osservazione che mi sembra sfuggita al Poincaré. Supponiamo che nei secondi membri delle (1) non compaia esplicitamente il tempo, e indichiamo con $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ questi secondi membri. Si ha:

*Questi secondi membri stessi $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ costituiscono un particolare sistema di integrali delle equazioni alle variazioni* (5).

[1] Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste* (Paris, Gauthiers-Villars), t. I, p. 162.

Ne segue che:

*Gli integrali del sistema*

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , \quad x_i(0) = x_i^{(0)} ,$$

*come funzioni dei loro valori iniziali, soddisfano alle equazioni lineari alle derivate parziali seguenti*:

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \frac{\partial x_i}{\partial x_k^{(0)}} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

## Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* [1]. Nota I del professore S. Sàlaghi, presentata dal Socio A. Ruffini [2].

### La linea della consonanza e la serie armonica.

In un precedente studio di acustica fisiologica sottoposi gli accordi musicali alla analisi geometrica [3]. Presi come ordinate le altezze dei suoni secondo la frequenza delle vibrazioni; come ascissa il tempo, la durata *musicale* dei medesimi, durante la quale le note sono tenute.

Procedendo dagli accordi semplici ai complessi, osservai che la congiungente la sommità delle ordinate, da principio rettilinea, va poi gradatamente incurvandosi nella parte superiore: dà origine ad archi di conica in ordine crescente di schiacciamento: prima rami di iperbole, quindi parabola ed infine ellisse. Al limite, col sovrapporsi della parte destra e sinistra della conica, termina in un segmento rettilineo (conica degenerata) [4].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di terapia fisica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1919.

(3) Questi Rendiconti, Note I e II, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem., fascicoli 3° e 4°. Roma, agosto 1918.

(4) Dal lato sperimentale, acustico-musicale, potei verificare che, quando da principio la congiungente è rettilinea, l'accordo è consonante (triade mg.). Proseguendo, la congiungente cessa di essere rettilinea, per incurvarsi, presentando la convessità verso l'alto; allora comincia la dissonanza, e cresce poi di asprezza di pari passo col grado di incurvamento dell'arco. La linea retta sarebbe quindi l'immagine grafica della consonanza.

Trovai inoltre che la dissonanza non può crescere indefinitamente. Ad un certo momento (al limite, corrispondente alla conica degenerata in un segmento rettilineo) si ricade nella consonanza. Questa però perde allora il carattere, che ha comunemente, di accordo di posa ed acquista il carattere di accordo di moto.