ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Ne segue che:
Gli integrali del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \ , \ x_i(0) = x_i^{(0)} ,$$

come funzioni dei loro valori iniziali, soddisfano alle equazioni lineari alle derivate parziali seguenti:

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k(x_1^{(0)} , x_2^{(0)} , \dots , x_n^{(0)}) \frac{\partial x_i}{\partial x_k^{(0)}} = F_i(x_1 , x_2 , \dots , x_n) .$$

Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* (1). Nota I del professore S. Sàlaghi, presentata dal Socio A. Ruffini (2).

La linea della consonanza e la serie armonica.

In un precedente studio di acustica fisiologica sottoposi gli accordi musicali alla analisi geometrica (3). Presi come ordinate le altezze dei suoni secondo la frequenza delle vibrazioni; come ascissa il tempo, la durata *musicale* dei medesimi, durante la quale le note sono tenute.

Procedendo dagli accordi semplici ai complessi, osservai che la congiungente la sommità delle ordinate, da principio rettilinea, va poi gradatamente incurvandosi nella parte superiore: dà origine ad archi di conica in ordine crescente di schiacciamento: prima rami di iperbole, quindi parabola ed infine ellisse. Al limite, col sovrapporsi della parte destra e sinistra della conica, termina in un segmento rettilineo (conica degenerata) (4).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di terapia fisica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1919.

(3) Questi Rendiconti, Note I e II, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem., fascicoli 3° e 4°. Roma, agosto 1918.

(4) Dal lato sperimentale, acustico-musicale, potei verificare che, quando da principio la congiungente è rettilinea, l'accordo è consonante (triade mg.). Proseguendo, la congiungente cessa di essere rettilinea, per incurvarsi, presentando la convessità verso l'alto; allora comincia la dissonanza, e cresce poi di asprezza di pari passo col grado di incurvamento dell'arco. La linea retta sarebbe quindi l'immagine grafica della consonanza.

Trovai inoltre che la dissonanza non può crescere indefinitamente. Ad un certo momento (al limite, corrispondente alla conica degenerata in un segmento rettilineo) si ricade nella consonanza. Questa però perde allora il carattere, che ha comunemente, di accordo di posa ed acquista il carattere di accordo di moto.

Ora mi propongo di esaminare il decorso ulteriore di questa congiungente lungo il campo uditivo.

La si prolunghi pertanto, oltre l'accordo perfetto maggiore, verso gli acuti, e prosegua rettilinea a raffigurare la linea della consonanza (1).

Nella nuova rappresentazione si osserva che, ad intervallo eguale di ascisse, la retta incontra la sommità delle ordinate degli armonici in ordine progressivo di intonazione. Le ottave susseguentisi in direzione degli acuti vanno, come s'intende, allungandosi nel valore delle ascisse in progressione geometrica di ragione due. Coll'allargarsi dello spazio occupato dalle ottave successive, si estendono gli spazî vuoti tra suono e suono, spazi che possono essere occupati con suoni nuovi consonanti. E questi — cosa inattesa e singolare — costituiscono il germe, l'origine di altrettanti armonici che si vedranno poi apparire nelle ottave susseguenti. E così, dai nuovi suoni via via aggiunti, verrà fuori gradatamente l'intera serie armonica. Il procedimento è descritto in calce (2). Per poterlo seguire, è bene di confrontare la unita tavola della « linea della consonanza lungo il campo uditivo ».

(1) Sappiamo che nelle nostre costruzioni grafiche le ordinate, rappresentanti la frequenza delle vibrazioni nei singoli suoni, crescono di ottava in ottava in progressione geometrica di ragione due. Giovandoci del metodo che i matematici chiamano, con Lalanne, dell'*anamorfismo geometrico* (Lalanne, *Mémoire sur les tables graphiques et sur la Géometrie anamorphique*, Annales des Ponts et Chaussées, 1846), possiamo fare in modo che la nostra congiungente conservi sempre la forma rettilinea. A tal uopo occorre che in una nuova rappresentazione grafica le ascisse crescano nella stessa proporzione delle ordinate.

(2) Partendo, poniamo, dalla ottava seconda, che va dal *do* (16) al *do* (32) e costruendo in essa l'accordo perfetto maggiore: *do* (16), *mi* (20), *sol* (24), *do* (32), scorgesi come la terza nota (il *sol*, terzo armonico del *do* di 8 vibrazioni) sia *equidistante* dagli estremi. *Viene quindi naturale il pensiero di inserire la nota simmetrica del* **mi** (20) tra il *sol* (24) ed il *do* (32). Come la prima metà della ottava (16-24), divisa in due parti eguali dal *mi*, dà la consonanza perfetta, così parimente la seconda metà dell'ottava (24-32), divisa in due parti eguali dal nuovo suono intercalato, darà una consonanza perfetta. Tale nota aggiunta avrebbe evidentemente 28 vibrazioni; e noi troviamo che il settimo armonico del *do* (8) è una nota di 56 vibrazioni la quale può avvicinarsi, in certo modo, al *si* bemolle. La nota aggiunta non è dunque altro che l'origine del settimo armonico.

Nella terza ottava, che va da 32 a 64 vibrazioni, abbiamo gli stessi intervalli *equidistanti* come nella ottava seconda, ma di larghezza raddoppiata. Tra di loro *pensiamo naturalmente* di intercalare quattro note simmetriche nella frequenza delle vibrazioni. Ed esse, inalzate di ottava, riproducono il nono, l'undecimo, il tredicesimo, il quindicesimo armonico. Questi armonici possono, però con molta buona volontà, ravvicinarsi alle note *re*, *fa* diesis, *la* bemolle e *si*.

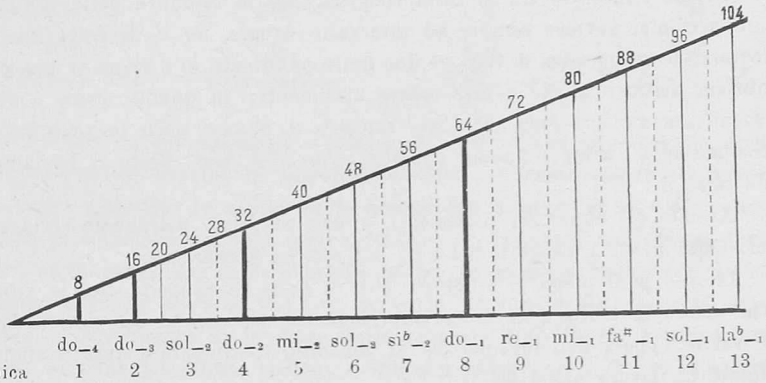
La quarta ottava, che va da 64 a 128 vibrazioni, contiene gli stessi otto intervalli *equidistanti*, di larghezza però doppia di quella che hanno nella ottava precedente. Qui parimenti inseriamo altri otto suoni *simmetrici* o equidistanti, rappresentati dal numero delle vibrazioni. E questi, elevati di ottava, riproducono nuovi armonici, precisamente il 17°, il 19°, 21°, 23°, 25°, 27°, 29°, 31° armonico.

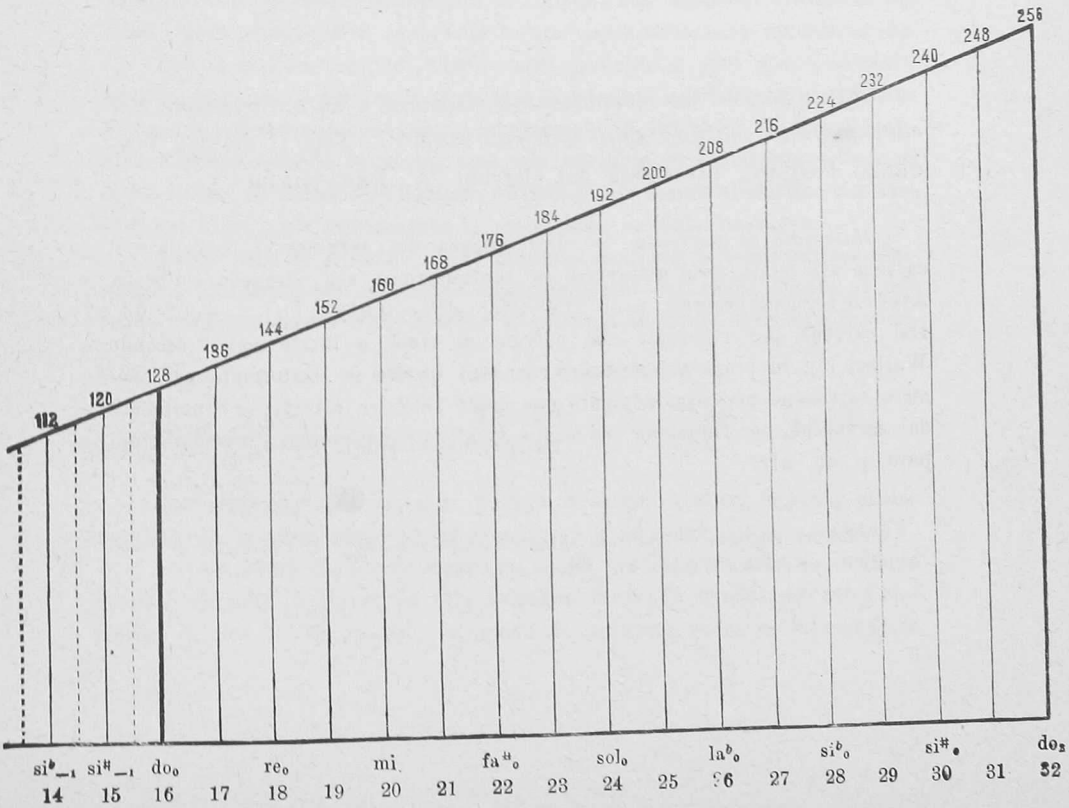
E così potrebbe continuarsi indefinitamente, perchè gli armonici sono illimitati come i numeri. Quelli intanto, che furono qui ricostruiti e riconosciuti come tali, sono raccolti nella nostra tavola.

TAVOLA

raffigurante il decorso della linea della consonanza lungo la serie armonica.

Per comodità di calcolo e per economia di spazio nel disegno, le operazioni vi sono fatte nel registro basso. Volendole riferire al registro medio, ove nei libri di testo sono comunemente inscritti i principali armonici, conviene moltiplicare per otto il numero delle vibrazioni. Ciò equivale a spostare di tre ottave in alto tutta la costruzione. La notazione seguìta nell'ordine delle ottave è secondo il sistema chiamato degli indici. Le linee verticali *punteggiate* indicano l'altezza d'intonazione dei suoni *nuovi* che furono aggiunti nei luoghi simmetrici.





Dando una occhiata alla suddetta tavola, scorgesi che il numero degli armonici, compresi in ciascuna ottava, cresce in direzione degli acuti in progressione geometrica di ragione due.

Al contrario, l'intervallo musicale tra gli armonici stessi va gradatamente diminuendo: dapprima è di ottava, poi di quinta, poi di terza, di tono, di semitono, di quarto, di ottavo di tono. La suddivisione degli intervalli in parti aliquote è indefinita. Se un giorno dovesse farsi l'attuazione in pratica di un simile frazionamento è da prevedere che vi farebbe difetto la varietà. Troppa è la simmetria.

Poichè l'incontro tra la retta congiungente la sommità delle ordinate e gli armonici avviene sempre ad intervallo eguale, ne è derivato che la progressione geometrica di ragione due nelle coordinate si è scissa in una progressione aritmetica. Nè poteva essere altrimenti; in quanto, come è noto, i suoni armonici crescono anche per rapporto al numero delle loro vibrazioni, ossia per le y, come i numeri semplici: 2, 3, 4, ecc., posto il fondamentale come 1.

Avendo gli opportuni istrumenti, sirena ed altro, potrebbero verificarsi sperimentalmente i risultati ottenuti coll'analisi geometrica.

Intanto però prego di riflettere che in tema di rapporti tra le vibrazioni sonore la teoria gode di una supremazia incontrastata. Qui essa ha fatto già valere l'opera dell'ingegno, ed al controllo sperimentale rimarrà affidato soltanto un lavoro materiale.

Chimica. — *Sui carvomentoli isomeri e sulla scissione del carvomegtolo inattivo negli antipodi ottici* [1]. Nota II del dot. Vincenzo Paolini, presentata dat Corrisp. A. Peratoner [2].

Materiale di partenza. — Dall'essenza del carumcarvi fu isolato il carvone allo stato puro attraverso la combinazione con idrogeno solforato. Aveva le seguenti costanti: p. eb. 224°-225°; $d^{20} = 0{,}9596$; $[\alpha]_D = +62°{,}04'$. Dal carvone, per riduzione con polvere di zinco e idrato sodico secondo Wallach [3], fu preparato il diidro-carvone; questo fu trasformato nell'isomero carvenone per riscaldamento con acido solforico diluito; e finalmente dal carvenone, per riduzione con sodio ed alcool, si pervenne al carvomentolo puro, p. eb. 218°.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1919.
(3) Annalen, 286, pp. 130 e 277, pag. 130.