ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie spirali.* Nota I del Socio Luigi Bianchi [1].

1. È noto che le superficie spirali di S. Lie godono, secondo Maurice Lévy, insieme alle loro deformate per flessione di proprietà assimilabili a quelle delle deformate delle superficie di rotazione [2]. Nella presente Nota si introducono le superficie spirali, e le loro deformate, dalla risoluzione del seguente problema della teoria delle deformazioni infinitesime per le superficie flessibili ed inestendibili:

Trovare le superficie S (*non sviluppabili*) *che ammettono una funzione caratteristica* φ *per le deformazioni infinitesime, fissa in tutte le flessioni della superficie.*

Si vedrà che, oltre la classe ben nota delle deformate delle superficie di rotazione (per le quali le deformazioni infinitesime in discorso sono quelle che le fanno strisciare in se stesse), esiste un'altra sola soluzione del problema, data appunto dalle superficie applicabili sulle spirali.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1919.

(2) Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Ière Partie (2ème édition, 1914, § 90 ss.).

Si sa che per ogni speciale configurazione di una superficie S, definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{cases}$$

le funzioni φ caratteristiche delle deformazioni infinitesime sono le soluzioni dell'equazione di Weingarten (¹)

$$\text{(A)}\qquad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}+$$

$$+\frac{ED''+GD-2FD'}{EG-F^2}\,\varphi=0,$$

dove K indica la curvatura (non nulla) della superficie.

Per la risoluzione del problema enunciato conviene porre questa equazione sotto un'altra forma facendo sparire le derivate di D, D', D''. Ponendo

$$\varDelta=\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}\;,\quad \varDelta'=\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\;,\quad \varDelta''=\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}},$$

scriviamo la (A) nel modo seguente:

$$K\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\varDelta''-\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\varDelta'\right\}+$$

$$+K\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\varDelta-\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\varDelta'\right\}+(E\varDelta''+G\varDelta-EF\varDelta')\,\varphi=0;$$

eseguendo parzialmente le integrazioni coll'aver riguardo alle formole di Codazzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varDelta'}{\partial u}-\dfrac{\partial\varDelta}{\partial v}=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\varDelta-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\varDelta'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\varDelta'' \\ \dfrac{\partial\varDelta'}{\partial v}-\dfrac{\partial\varDelta''}{\partial u}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\varDelta-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\varDelta'+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\varDelta'', \end{cases}$$

si trova la nuova forma richiesta

$$\text{(A*)}\qquad \varDelta''\left\{\varphi_{11}+KE\varphi-\frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\}-$$

$$-2\varDelta'\left\{\varphi_{12}+KF\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\}+$$

$$+\varDelta\left\{\varphi_{22}+KG\varphi-\frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}=0,$$

(¹) Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 224 ss.

dove $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ sono le derivate seconde covarianti di φ rispetto alla prima forma fondamentale (¹).

2. Supponiamo ora che esista per la superficie S una funzione caratteristica *fissa* per tutte le configurazioni che la S assume per flessione. In tal caso la relazione (A*), lineare omogenea in $\Delta, \Delta', \Delta''$ dovrà necessariamente ridursi ad una identità, annullandosi i coefficienti di $\Delta, \Delta', \Delta''$ (²).

La questione proposta è così ridotta alla ricerca di quelle forme del ds^2 per le quali esistono soluzioni comuni alle tre seguenti equazioni del secondo ordine:

$$\text{(1)} \quad \begin{cases} \varphi_{11} = \dfrac{\partial \log K}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - KE\varphi \\[2ex] \varphi_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log K}{\partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \log K}{\partial u} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - KF\varphi \\[2ex] \varphi_{22} = \dfrac{\partial \log K}{\partial v} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - KG\varphi . \end{cases}$$

Queste possono anche compendiarsi nella formola

$$\varphi_{11}\, du^2 + 2\varphi_{12}\, du\, dv + \varphi_{22}\, dv^2 = \\ = d \log K\, d\varphi - K(E\,du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)\,,$$

che ne pone meglio in evidenza la natura *invariantiva*.

Siccome φ non può ridursi ad una costante [altrimenti dalle (1) si avrebbe $K=0$ contro l'ipotesi], possiamo semplificare la ricerca assumendo a linee coordinate $u =$ cost. le linee $\varphi =$ cost., e le loro trajettorie ortogonali come $v =$ cost. Così avremo

$$F = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi(u) \text{ (funzione di } u);$$

e le (1), sostituendo ai simboli di Christoffel i loro valori effettivi, diventano ordinatamente

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \varphi'' - \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial u}\varphi' - \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial K}{\partial u}\varphi' + KE\varphi = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right)\varphi' = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}\varphi' + KG\varphi = 0\,, \end{cases}$$

(¹) I valori effettivi sono

$$\varphi_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\varphi_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\varphi_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,.$$

(²) Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 254.

gli accenti avendo il solito significato di derivazione. La media di queste, non essendo nulla φ', equivale alla

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{KE}) = 0,$$

e dà

$$\mathrm{KE} = f(u) \quad \text{(funzione di } u\text{)}; \tag{3}$$

indi dalla terza risulta

$$\frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = -\frac{f\varphi}{\varphi'}, \tag{4}$$

cioè $\sqrt{\mathrm{G}}$ è il prodotto di due funzioni: l'una di u, l'altra di v; e la seconda di queste, disponendo del parametro v, può farsi costante, onde avremo

$$\sqrt{\mathrm{G}} = \mathrm{U} \quad \text{(funzione di } u\text{)}, \tag{5}$$

e sarà, per la (4),

$$\varphi' = -\frac{f\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}\varphi. \tag{6}$$

Ora la prima delle (2), osservando che per la (3)

$$\frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial u} = \frac{f'}{f} - \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u},$$

diventa

$$\varphi'' + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u}\varphi' - \frac{f'}{f}\varphi' = f\varphi = 0, \tag{7}$$

dalla quale segue che anche $\dfrac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u}$ è funzione di u soltanto; indi, disponendo del parametro u, potremo rendere

$$\sqrt{\mathrm{E}} = \mathrm{V} \quad \text{(funzione di } v\text{)}.$$

Ma dalla (7), osservando che dalla (6) derivando segue

$$\varphi'' = \left(\frac{f^2\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'^2} - f + \frac{f\mathrm{U}\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^2} - \frac{f'\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}\right)\cdot\varphi,$$

deduciamo

$$f\mathrm{U}(\mathrm{U}'' + f\mathrm{U}) = 0;$$

e siccome il primo fattore $f\mathrm{U}$ non può annullarsi, avremo

$$f = -\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}},$$

onde la (6) e la (3) daranno

(8) $$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{U''}{U'}$$

(8*) $$K = -\frac{U''}{UV^2}.$$

D'altra parte il nostro ds^2 ha la forma

$$ds^2 = V^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

e la sua curvatura K è data da

$$K = -\frac{UU'' + VV''}{U^2 V^2};$$

sicchè, paragonando colla (8*), risulta $V'' = 0$ e quindi

$$V = av + b,$$

con a, b costanti.

Viceversa, se il ds^2 ha la forma

(9) $$ds^2 = (av + b)^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

i calcoli eseguiti dimostrano che basta prendere φ in guisa da soddisfare la (8), cioè

$$\varphi = c\,U' \quad (c \text{ costante}),$$

e questa φ soddisfa al sistema (1), indi all'equazione caratteristica (A) di Weingarten in tutte le configurazioni di una superficie S d'elemento lineare (9).

Ora due casi sono da distinguersi, secondo che nella (9) la costante a è nulla, oppure diversa da zero. Nel primo caso si può fare $b = 1$ e si ha il ds^2 tipico delle superficie di rotazione; nel secondo è lecito fare $a = 1$, $b = 0$ e si ha l'altra forma tipica del ds^2:

$$ds^2 = v^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

che appartiene (Darboux, loc. cit.) a tutte e sole le superficie spirali. Concludiamo quindi:

Esistono due sole classi di superficie applicabili con funzione caratteristica φ fissa in tutte le deformazioni della superficie, e sono:

1° *le deformate delle superficie di rotazione con*

(I) $$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2;$$

2° *le deformate delle superficie spirali con*

(II) $$ds^2 = v^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

ed ambedue le volte $\varphi = \mathrm{U}'$ *è funzione caratteristica fissa in tutte le deformazioni.*

3. Lasciando da parte il primo caso ben noto (I), proseguiamo nel secondo caso (II) lo studio delle corrispondenti deformazioni infinitesime. In generale si sa che ad ogni soluzione φ dell'equazione (A) di Weingarten corrisponde (a meno di una traslazione) una deformazione infinitesima di S, le cui componenti

$$\varepsilon\overline{x}\ ,\ \varepsilon\overline{y}\ ,\ \varepsilon\overline{z}\quad (\varepsilon \text{ costante infinitesima})$$

si calcolano per quadrature dalle formole

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} &= \frac{\left(\mathrm{D}\,\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{D}'\,\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right)\varphi + \left(\mathrm{D}'\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{D}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\mathrm{X}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \\
\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} &= \frac{\left(\mathrm{D}'\,\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{D}''\,\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right)\varphi + \left(\mathrm{D}''\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{D}'\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\mathrm{X}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\ ,
\end{aligned}\right.$$

ed analoghe per $\overline{y}\,,\overline{z}$, alle quali possiamo dare la forma equivalente

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} &= \frac{\mathrm{F}\,\dfrac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{E}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,\varphi + \frac{\mathrm{D}'\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{D}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,\mathrm{X} \\
\frac{\partial\overline{x}}{\partial v} &= \frac{\mathrm{G}\,\dfrac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{F}\,\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,\varphi + \frac{\mathrm{D}''\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{D}'\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,\mathrm{X}\,.
\end{aligned}\right.$$

Interpretando $\overline{x}\,,\overline{y}\,,\overline{z}$ come coordinate di un punto nello spazio, questo punto $\overline{\mathrm{P}} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ descrive la superficie $\overline{\mathrm{S}}$ corrispondente per ortogonalità di elementi alla S ed individuata dalla funzione caratteristica φ.

Se applichiamo le formole (10) al nostro caso (II), ponendovi $\varphi = \mathrm{U}'$, troviamo

$$(11)\qquad \frac{\partial\overline{x}}{\partial u} = -\frac{\mathrm{U}'v}{\mathrm{U}}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{D}'v\mathrm{X}\quad ,\quad \frac{\partial\overline{x}}{\partial v} = \frac{\mathrm{UU}'}{v}\,\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{D}''v\mathrm{X}\,.$$

Ma dalle formole fondamentali

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D}'\mathrm{X} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D}''\mathrm{X}
\end{aligned}\right.$$

si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{U'}{U}\dfrac{\partial x}{\partial v} + D'X \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\dfrac{UU'}{v^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + D''X, \end{cases}$$

onde le (11) si scrivono

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - v\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad , \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -v\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Sotto questa forma la loro integrazione è immediata; e disponendo delle costanti additive in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, possiamo prendere

$$(12) \qquad \bar{x} = x - v\frac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad \bar{y} = y - v\frac{\partial y}{\partial v} \quad , \quad \bar{z} = z - v\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Il punto $\overline{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ risulta situato nel piano tangente in P alla superficie S; e poichè la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ delle linee $v =$ cost. è data, in grandezza e segno, da

$$\frac{1}{\rho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{Uv},$$

si vede che $\overline{P}$ coincide col centro di curvatura geodetica delle linee $v =$ cost. Abbiamo dunque il risultato:

Se per una superficie S *d'elemento lineare* (II)

$$ds^2 = v^2 du^2 + U^2 dv^2$$

si considera la superficie $\overline{S}$ *luogo dei centri di curvatura geodetica delle linee* $v =$ cost., *questa* $\overline{S}$ *corrisponde per ortogonalità d'elementi alla* S, *e la funzione* φ *caratteristica della iva deformazione infinitesima è data da* $\varphi = U'$.

È manifesto che in questo caso, deformando comunque la superficie S che trasporti eco rigidamente i segmenti tangenti $P\overline{P}$, la superficie $\overline{S}$ luogo degli estremi $\overline{P}$ corrisponde sempre per ortogonalità d'elementi alla S.

4. La proprietà ora segnalata per le deformate delle superficie spirali è tanto più notevole che essa è esclusiva per queste superficie, come viene espresso dalla proposizione seguente:

Se due superficie $S, \overline{S}$ *si corrispondono per ortogonalità d'elementi, ed ogni punto* $\overline{P}$ *di* $\overline{S}$ *giace nel piano angente nel punto corrispondente* P *alla* S, *questa* S *è applicabile sopra una superficie spirale e la* $\overline{S}$ *è il luogo dei centri di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle linee inviluppate sulla* S *dai segme* $P\overline{P}$.

Per la dimostrazione prendasi a sistema coordinato sopra S un sistema ortogonale (u, v) nel quale le linee $u = \text{cost.}$ siano quelle inviluppate sulla S dai detti segmenti $P\overline{P}$. Colle consuete notazioni ([1]), posto $T = \overline{P\overline{P}}$, potremo scrivere

$$\overline{x} = x + TX_2 \;, \quad \overline{y} = y + TY_2 \;, \quad \overline{z} = z + TZ_2 \,,$$

e di qui, derivando, abbiamo

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + \dfrac{T}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) X_1 + \dfrac{\partial T}{\partial u} X_2 + T \dfrac{D'}{\sqrt{G}} X_3 \\[2ex] \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial u} = -\dfrac{T}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial v} + \sqrt{G}\right) X_2 + T \dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_3 \,. \end{cases}$$

L'ipotesi che $S, \overline{S}$ si corrispondano per ortogonalità di elementi. si traduce nelle tre condizioni

$$SX_1 \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0 \;, \quad SX_2 \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0 \;, \quad \sqrt{E}\, SX_1 \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + \sqrt{G}\, SX_2 \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0 \,,$$

che, calcolate colle (13), diventano

$$(14)\quad \sqrt{E} + \frac{T}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \;, \quad \frac{\partial T}{\partial v} + \sqrt{G} = 0 \;, \quad \sqrt{G} \frac{\partial T}{\partial u} - T \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \,.$$

Intanto, non figurando in queste formole D, D', D'', si vede che la proprietà, supposta in una configurazione di S, si mantiene per tutte.

Ora la prima delle (14) dà

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\rho_v} \,;$$

dunque: $\overline{P}$ *è il centro di curvatura geodetica delle linee* $v = \text{cost.}$ Dalla terza segue

$$T = V\sqrt{G} \,,$$

con V funzione di v; e successivamente, dalla seconda,

$$(15)\quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} = -\frac{V' + 1}{V} \,.$$

Dunque $\sqrt{G}$ è il prodotto di una funzione di u per una funzione di v, e la seconda di queste può farsi eguale a una costante; così abbiamo

$$\sqrt{G} = U \,.$$

([1]) Cfr. particolarmente *Lezioni*, vol. II, pag. 91.

Allora, dalla (15),

$$V' = -1,$$

e, integrando, possiamo prendere $V = -v$, indi

$$T = -v\sqrt{G} = -Uv,$$

e, in fine, dalla prima delle (14) abbiamo

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{v}.$$

Così $\sqrt{E} = v\psi(u)$; e, cangiando il parametro u, possiamo fare $\sqrt{E} = v$, ritornando alla forma caratteristica (II) del ds^2 per le superficie spirali.

La nostra proposizione è stabilita e possiamo anche enunciare i risultati sotto la forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S *sia applicabile sopra una superficie spirale, è che esista una superficie* $\overline{S}$ *corrispondente alla* S *per ortogonalità d'elementi coi punti situati nei rispettivi piani tangenti di* S.

Matematica. — *Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives.* Nota del Socio Emile Borel [1].

Divers géomètres, notamment M. Burali Forti, ont mis en évidence les contradictions auxquelles conduisent certaines définitions de la théorie des ensembles. Pour échapper à ces contradictions, j'ai proposé d'introduire la notion d'ensemble *effectivement énumérable*. La lecture d'un intéressant Mémoire de M. Sierpinski [2] me conduit à revenir sur cette définition et à préciser quelques points sur lesquels ma pensée n'avait pas été exprimée d'une manière suffisamment claire.

Un ensemble dénombrable, d'après Cantor, est un ensemble tel qu'une correspondance biunivoque peut exister entre ses éléments et les entiers positifs. Cette définition a été longtemps admise comme claire et l'on a raisonné sur les ensembles dénombrables *comme si*, pour chacun d'eux, on possédait effectivement une correspondance biunivoque avec les entiers positifs. Mais on s'est aperçu que l'on arrivait ainsi à des contradictions, à des paradoxes, et de nombreuses discussions ont eu lieu au sujet de ces paradoxes. J'ai montré que ces paradoxes disparaissent si l'on renonce à la

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1919.

(2) *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, par W. Sierpinski (Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, avril-mai 1918).