ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Allora, dalla (15),

$$V' = -1,$$

e, integrando, possiamo prendere $V = -v$, indi

$$T = -v\sqrt{G} = -Uv,$$

e, in fine, dalla prima delle (14) abbiamo

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{v}.$$

Così $\sqrt{E} = v\psi(u)$; e, cangiando il parametro u, possiamo fare $\sqrt{E} = v$, ritornando alla forma caratteristica (II) del ds^2 per le superficie spirali.

La nostra proposizione è stabilita e possiamo anche enunciare i risultati sotto la forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S *sia applicabile sopra una superficie spirale, è che esista una superficie* $\overline{S}$ *corrispondente alla* S *per ortogonalità d'elementi coi punti situati nei rispettivi piani tangenti di* S.

Matematica. — *Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives.* Nota del Socio Emile Borel [1].

Divers géomètres, notamment M. Burali Forti, ont mis en évidence les contradictions auxquelles conduisent certaines définitions de la théorie des ensembles. Pour échapper à ces contradictions, j'ai proposé d'introduire la notion d'ensemble *effectivement énumérable*. La lecture d'un intéressant Mémoire de M. Sierpinski [2] me conduit à revenir sur cette définition et à préciser quelques points sur lesquels ma pensée n'avait pas été exprimée d'une manière suffisamment claire.

Un ensemble dénombrable, d'après Cantor, est un ensemble tel qu'une correspondance biunivoque peut exister entre ses éléments et les entiers positifs. Cette définition a été longtemps admise comme claire et l'on a raisonné sur les ensembles dénombrables *comme si*, pour chacun d'eux, on possédait effectivement une correspondance biunivoque avec les entiers positifs. Mais on s'est aperçu que l'on arrivait ainsi à des contradictions, à des paradoxes, et de nombreuses discussions ont eu lieu au sujet de ces paradoxes. J'ai montré que ces paradoxes disparaissent si l'on renonce à la

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1919.

(2) *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, par W. Sierpinski (Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, avril-mai 1918).

définition précèdente et si on la remplace par la définition de l'ensemble *effectivement énumérable*, c'est à dire de l'ensemble pour lequel on connaît *effectivement* une correspondance biunivoque avec les entiers positifs. En d'autres termes, un ensemble effectivement énumérable est un ensemble *donné sous la forme*

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots,$$

chaque élément u_n étant connu quand on donne son rang (et inversement). Bien entendu, lorsqu'un ensemble effectivement énumérable est donné, il est possible, d'une infinité de manières, de modifier le numérotage; les ensembles effectivement énumérables ainsi obtenus sont équivalents à l'ensemble donné, mais ne lui sont pas identiques; dans certains cas même, ils ont des propriétés nettement différentes; en tous cas, il en sont logiquement distincts. Ces notions sont très loin d'être réellement nouvelles; toute la théorie classique des séries infinies repose implicitement sur elles.

Lorsque l'on admet ces définitions, il est clair qu'une infinité effectivement énumérable d'ensembles effectivement énumérables peut être mise sous la forme d'un ensemble effectivement énumérable; il suffit, pour cela, d'énoncer en termes finis l'un des procédés bien connus. D'une manière générale, les raisonnements classiques sur les ensembles dénombrables s'appliquent sans difficulté aux ensembles effectivement énumérables, à condition de prendre soin, dans chaque cas, de préciser les lois et les méthodes que l'on utilise.

Lorsque l'on veut appliquer aux ensembles dénombrables les résultats démontrés pour les ensembles effectivement énumérables, il est nécessaire de raisonner, pour chaque ensemble dénombrable, sur une correspondance supposée réalisée, c'est à dire, en définitive, de supposer l'ensemble dénombrable donné sous la forme (1). Ceci implique l'axiome de M. Zermelo; ou, tout au moins, l'axiome de M. Zermelo affirme la *possibilité abstraite* de mettre un ensemble dénombrable sous une forme telle que (1), sans donner d'ailleurs effectivement un moyen déterminé de le faire. La question principale, à mon avis, est de savoir si l'on a le droit d'appliquer à une telle suite (1) conçue abstraitement, mais non effectivement définie, les mêmes raisonnements qu'à une suite (1) effectivement donnée. L'étude des paradoxes de la théorie des ensembles, en particulier l'étude de l'ensemble des nombres qui peuvent être définis par un nombre fini de mots, semble prouver que certains raisonnements, qui ne conduisent à aucune contradiction pour les ensembles effectivement énumérables, conduisent au contraire à des contradictions lorsqu'on les applique à des ensembles dénombrables. Il ne me paraît pas douteux que les ensembles ou les correspondances « définis » au moyen de l'axiome de M. Zermelo n'ont pas les mêmes propriétés que les ensembles et les correspondances effectivement définis: s'ils « existent », c'est d'un autre genre d'existence.

Aussi doit-on savoir gré à M. Sierpinski d'avoir énuméré d'une manière très détaillée les diverses questions dans lesquelles intervient l'axiome de M. Zermelo. Sans entrer dans le détail de cette énumération, qu'il me soit permis de remarquer que, si l'axiome de M. Zermelo intervient nécessairement dans un problème, c'est en général parce qu'il est implicitement admis dans l'énoncé même du problème; ainsi, toutes les fois qu'il est question d'ensemble dénombrable et non pas d'ensemble effectivement énumérable au sens strict du terme, l'axiome de M. Zermelo est postulé. Si l'on introduisait uniquement des êtres effectivement définis, tels que les ensembles effectivement énumérables, l'axiome de M. Zermelo n'aurait pas à intervenir, et les nouveaux énoncés obtenus, peut être plus restrictifs en apparence, auraient la même portée au point de vue des applications.

Fisica. — *Sulla gravitazione*. Nota I del Corrisp. Q. MAJORANA [1].

Origini della ricerca. — In un precedente lavoro [2] sulla influenza del movimento della sorgente o di uno specchio, sulla propagazione della luce, esprimevo il dubbio che fra le cause incognite, che possono influire sul fenomeno, potesse esservi anche il campo gravitazionale della nostra terra. Ciò dicevo, non perchè ragioni specifiche mi inducessero in tale dubbio, ma piuttosto per procedere completamente alla ricerca di tutte le cause stesse. Lasciando quindi da parte il primitivo problema, dopo i risultati sperimentali descritti nel suaccennato lavoro, mi son proposto sin dall'aprile 1918 di ricercare nuovi fatti sperimentali, che potessero gettar luce sulla natura intima del fenomeno gravitazionale. Scopo della presente relazione è di render conto del risultato di tale ricerca. Premetto, peraltro, che le considerazioni che qui svolgerò, ed i fatti da me ora constatati, non sembrano avere nulla di comune colla ricerca precedente; nè io ho la pretesa di voler arrivare, anche in un tempo lontano, a stabilire con tutta sicurezza un legame tra due generi tanto diversi di ricerca; solo ho voluto accennare alla occasione, che mi indusse ad intraprendere l'attuale lavoro.

Caratteri della legge di Newton. — Fra tutte le leggi fisiche conosciute, quella della gravitazione universale apparisce sinora la più perfetta, nella sua semplicità: proporzionalità *diretta* alle masse agenti, *inversa* al

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1919.

(2) Vedi: questi Rendiconti, XXVI, pp. 118 e 155, an. 1917; XXVII, p. 402 anno 1918; Atti R. Acc. di Torino, LIII, p. 793, an. 1918; Phil. Mag., XXXV, p. 163, an. 1918.