

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ensembles et les correspondances effectivement définis: s'ils « existent », c'est d'un autre genre d'existence.

Aussi doit-on savoir gré à M. Sierpinski d'avoir énuméré d'une manière très détaillée les diverses questions dans lesquelles intervient l'axiome de M. Zermelo. Sans entrer dans le détail de cette énumération, qu'il me soit permis de remarquer que, si l'axiome de M. Zermelo intervient nécessairement dans un problème, c'est en général parce qu'il est implicitement admis dans l'énoncé même du problème; ainsi, toutes les fois qu'il est question d'ensemble dénombrable et non pas d'ensemble effectivement énumérable au sens strict du terme, l'axiome de M. Zermelo est postulé. Si l'on introduisait uniquement des êtres effectivement définis, tels que les ensembles effectivement énumérables, l'axiome de M. Zermelo n'aurait pas à intervenir, et les nouveaux énoncés obtenus, peut être plus restrictifs en apparence, auraient la même portée au point de vue des applications.

Fisica. — *Sulla gravitazione*. Nota I del Corrisp. Q. MAJORANA ⁽¹⁾.

Origini della ricerca. — In un precedente lavoro ⁽²⁾ sulla influenza del movimento della sorgente o di uno specchio, sulla propagazione della luce, esprimevo il dubbio che fra le cause incognite, che possono influire sul fenomeno, potesse esservi anche il campo gravitazionale della nostra terra. Ciò dicevo, non perchè ragioni specifiche mi inducessero in tale dubbio, ma piuttosto per procedere completamente alla ricerca di tutte le cause stesse. Lasciando quindi da parte il primitivo problema, dopo i risultati sperimentali descritti nel suaccennato lavoro, mi son proposto sin dall'aprile 1918 di ricercare nuovi fatti sperimentali, che potessero gettar luce sulla natura intima del fenomeno gravitazionale. Scopo della presente relazione è di render conto del risultato di tale ricerca. Premetto, peraltro, che le considerazioni che qui svolgerò, ed i fatti da me ora constatati, non sembrano avere nulla di comune colla ricerca precedente; nè io ho la pretesa di voler arrivare, anche in un tempo lontano, a stabilire con tutta sicurezza un legame tra due generi tanto diversi di ricerca; solo ho voluto accennare alla occasione, che mi indusse ad intraprendere l'attuale lavoro.

Caratteri della legge di Newton. — Fra tutte le leggi fisiche conosciute, quella della gravitazione universale apparisce sinora la più perfetta, nella sua semplicità: proporzionalità *diretta* alle masse agenti, *inversa* al

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1919.

⁽²⁾ Vedi: questi Rendiconti, XXVI, pp. 118 e 155, an. 1917; XXVII, p. 402 anno 1918; Atti R. Acc. di Torino, LIII, p. 793, an. 1918; Phil. Mag., XXXV, p. 163, an. 1918.

quadrato delle distanze. Nessuna causa esteriore od interiore, rispetto alle masse che si considerano, si è sinora dimostrata capace di turbare, con tutta sicurezza, il rigore della legge stessa. Se anche un'influenza potesse venire ammessa, per opera delle reazioni chimiche o variazioni di temperatura manifestantisi nelle masse agenti⁽¹⁾, ciò potrebbe portare alla meno-mazione del principio della *costanza della massa*, ma non della legge di Newton, propriamente detta.

Una delle caratteristiche più speciali di questa legge, è la nessuna influenza della natura del mezzo, nella manifestazione della forza attrattiva. Come è noto, tutte le azioni naturali, per le quali si ha la possibilità di ottenere del lavoro ad una certa distanza dalla località in cui vi sia della materia, si manifestano in guisa differente al variare del mezzo interposto: così dicasi delle azioni meccaniche (propagazione di urti o vibrazioni, di semplice pressione, attraverso un mezzo materiale), delle calorifiche, delle elettriche, delle elettromagnetiche, delle luminose, dei raggi catodici ecc. In tutti questi casi, la natura del mezzo (sia questo materiale o costituito dall'ipotetico etere) ha un'importanza capitale sui fenomeni constatabili; al variare del mezzo, variano in genere, e talvolta in misura notevolissima, tanto la velocità di propagazione, quanto la entità dei fenomeni stessi.

Questo principio vale per le azioni di carattere sia statico, che dinamico. Veramente, circa le prime occorre fare una restrizione, per quanto riguarda la pressione meccanica che, come è noto, si trasmette senza mutar di valore, a traverso la materia di qualunque natura. Ma è da osservare che, in ogni modo, oltre al potersi constatare la differente velocità di propagazione, nello stabilirsi di una determinata pressione, a traverso un mezzo materiale, si sa che il mezzo *etere* non consente la propagazione della pressione meccanica.

Per la forza di gravitazione, nulla di simile si è potuto sinora constatare. Non voglio qui discutere il problema della velocità di propagazione di detta forza: se cioè quella sia dell'ordine della velocità della luce, o molto superiore. Certamente, dopo che l'*actio in distans* degli allievi di Newton (non di Newton, che mai l'ammise) fu relegata fra le cose assurde, non vi ha cultore di scienze fisiche che non pensi con convincimento al valore finito di tale velocità; la misura di esso potrebbe essere messa in evidenza da delicatissime osservazioni astronomiche, e nulla può oggi indurci a negare la generica giustezza del suo concetto. Piuttosto fermiamo la nostra attenzione sul fatto, generalmente ammesso, della *niuna influenza del mezzo sulla manifestazione statica dei fenomeni gravitazionali. Due masse, a*

⁽¹⁾ Come è noto, ricerche del genere hanno dato luogo a vivaci discussioni e smentite; vedi Landolt, Zeitschr. für Chemie, XII, p. 1, an. 1894; Shaw, Philosophical Transactions, R. Soc. of London 216, p. 349, an. 1916.

parità di distanza, si attirano con la stessa forza, sia nel vuoto, sia se immerse in un mezzo di densità materiale qualsiasi. Inoltre: una sfera materiale omogenea, di determinata densità, subisce, da parte di altra massa esterna, un'attrazione direttamente proporzionale al suo volume. E ancora: la direzione, il senso, il valore delle forze sollecitanti due masse in presenza, non mutano, se, rimanendo immutate le altre condizioni di queste, si dispongono nella loro vicinanza altre masse, le cui azioni, su ciascuna delle prime, siano esattamente equilibrate. Questi, ed altri teoremi simili che potrebbero enunciarsi, si traducono ancora nella negazione di un carattere speciale della materia, che potrebbe definirsi *permeabilità gravitazionale* (analogo, sino ad un certo punto, alla permeabilità elettrica, od a quella magnetica) oppure *imperfetta trasparenza gravitazionale* (analogamente a quanto succede per la materia attraversata dalla luce).

Ricerche sperimentali anteriori. — Varii fisici hanno cercato di verificare sperimentalmente sino a qual punto tale principio, da me ora così enunciato, fosse veramente esatto. Così Austin e Thwing ⁽¹⁾, che sperimentavano con una bilancia di Cavendish, tipo Boys, interponevano fra le masse mobili sospese al filo di torsione, e quelle fisse, degli schermi di diverse sostanze più o meno dense; e mai trovarono con ciò, variazioni nelle forze attrattive, almeno dentro il limite di precisione dell'esperimento e cioè dell'1% delle forze agenti. Successivamente la questione fu ripresa da Kleiner ⁽²⁾, Laager ⁽³⁾, Cremieu ⁽⁴⁾, Erisman ⁽⁵⁾. Per opera di quest'ultimo fisico, la precisione dell'esperienza venne spinta sino al valore di 1/1200 della forza attrattiva. Va notato che, mentre il metodo seguito da tutti gli autori citati era quello della bilancia di torsione, Laager ha anche sperimentato pesando una palla di argento di gr. 1,5, alternativamente circondata o no da una sfera cava a pareti spesse, di piombo. Così egli non scorse variazione superiore ad 1/15000 circa, del peso totale.

Non mi consta che altri autori abbiano ripreso più recentemente tali ricerche. Ad ogni modo esse hanno valso a riaffermare la precisione della legge di Newton, almeno dentro i limiti d'approssimazione raggiunti.

Dubbii sulla esattezza della legge di Newton. — Il fisico e l'astronomo sono stati indotti, per quanto si è detto più sopra, a ritenere come nulla la azione del mezzo, nella manifestazione delle forze newtoniane. Ma è tale convincimento giustificato del tutto dai fatti osservati? Le citate esperienze, come si è visto, non hanno consentito, al più, che una precisione di 10^{-5} (Laager), nello studio della eventuale influenza del mezzo. Una tale

(1) Phys. Rev. 5, an. 1897.

(2) Archives de sc. phys. e nat. IV, 20, p. 420, an. 1905.

(3) Dissert., Zürich, 1904.

(4) Compt. rend. 140, p. 80, 1905; 141, p. 653 e 713, an. 1905; 143, p. 887, an. 1906.

(5) Vierteljahrschr. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich, 53, p. 157, an. 1908.

approssimazione, se può rappresentare uno sforzo sperimentale notevole, è pur tuttavia troppo piccola, se si vuole, con quel convincimento, interpretare tutti i fenomeni che la natura ci offre allo studio.

Infatti, secondo l'esperimento di Laager, una sfera di circa 1 gr. non muta sensibilmente di peso, se racchiusa dentro una sfera di piombo della massa di qualche chilogrammo. Ma è lecito credere che lo stesso accadrebbe se tale massa esterna fosse di un ordine di grandezza assai superiore, p. e. di qualche quintale o tonnellata? Se diciamo *massa* la proprietà della materia da cui, in ragione diretta, dipende il peso, ci si può domandare quale sarebbe la massa di 1 cmc. di materia, p. e. di argento posto al centro della terra, dato che esistesse un mezzo per determinarla dallo esterno della terra stessa. E quale valore avrebbe quella massa, se collocata al centro del sole? Apparirebbe sempre come di gr. 10,5? Come può esser lecito dalle, diciamo pure, grossolane esperienze citate, trarre la conseguenza che le masse situate al centro della terra, od al centro del sole (cioè di una massa 333000 volte maggiore), esercitino, su altre masse esteriori, forze attrattive, come se fossero perfettamente isolate? Eppure il convincimento si è radicato nella mente del fisico che la legge di Newton sia, da questo lato, impeccabile. È vero che a giustificazione di ciò stanno le osservazioni astronomiche; ma occorre riflettere che in tal caso le masse in giuoco, hanno dimensioni piccole, di fronte alle loro distanze reciproche; inoltre l'astronomo deduce dalla terza legge di Keplero, e dalle perturbazioni del moto degli astri, valori di massa, che potrebbero non aver nulla da vedere con le *masse vere*; la materia interna degli astri potrebbe essere schermata da quella più vicina alla crosta esteriore e, forse adottando il concetto di una *massa apparente*, i fenomeni si svolgerebbero, da questo lato, come se la legge di Newton fosse rigorosamente esatta. Dico *forse*, perchè, come farò vedere, potrà darsi che anche l'astronomo avrà modo di accorgersi di questa *azione di schermo della materia sulla gravitazione*, se effettivamente esiste.

Ma prima di andare avanti, occorre precisare anzitutto i caratteri, secondo cui questo probabile fenomeno si debba presentare. Vi sono due aspetti possibili e diversi, dai quali la questione può esser considerata. Il primo aspetto si ricava dallo esame dei fenomeni attrattivi elettrici e magnetici, nei quali casi, come è noto, si parla di *permeabilità*. Questa è caratteristica della materia del mezzo, e da essa dipende la misura della forza manifestantesi fra due masse elettriche o magnetiche; si moltiplica infatti per un fattore costante (l'inverso della permeabilità) l'espressione della forza nel vuoto, per ottenerne il valore a traverso il mezzo naturale. Essendo ciò vero per qualunque spessore di questo, se ne deduce che il fenomeno della permeabilità elettrica o magnetica, è constatabile anche per piccolissime distanze fra le masse agenti.

Per ricercare il secondo aspetto, occorre considerare fenomeni di altro

genere, nei quali cioè si manifesti assorbimento della azione a distanza. Della energia irradiata (come onde sonore, luce, particelle catodiche ecc.) si va affievolendo di solito, non solo secondo la legge della ragione inversa del quadrato delle distanze (analoga a quella di Newton), ma anche perchè il mezzo ne va progressivamente assorbendo una parte. In questo caso, è sovente difficile, sotto spessori piccoli, osservare il fenomeno dell'affievolimento dell'azione, ad una certa distanza. Così l'aria, trasparentissima sotto piccoli spessori, indebolisce notevolmente la luce del sole, se il suo spessore è di parecchi chilometri. La legge di tale affievolimento non corrisponde ad una semplice proporzione; interviene invece un fattore esponenziale, variabile con lo spessore del mezzo.

Quale dei due aspetti considerati può aiutarci a costruire un modello del fenomeno gravitazionale? Anzitutto, secondo le vedute più comuni, noi dovremmo, se mai, paragonare questo fenomeno a quello attrattivo elettrico o magnetico, piuttosto che alla propagazione di energia. Ma tal paragone apparisce difettoso: infatti, mentre nel caso elettrico la forza è dipendente dalla permeabilità del mezzo materiale (essa varia cioè notevolmente non appena si muti la natura di questo), nulla di simile avviene per la forza gravitazionale.

Paragoniamo invece questa, ad un fenomeno di propagazione dinamica, che dia luogo ad assorbimento progressivo. Gli esempi di teorie imbastite con tal proposito non mancano e cito al riguardo il lavoro di Isenkrahe⁽¹⁾ nel quale se ne trovano riassunte parecchie, dovute ad Eulero, Riemann, Dellingshausen, Lesage, Thomson, Preston. In qualcuna di queste può la gravitazione essere raffigurata come un *fenomeno di assorbimento e di equilibrio dinamico*. Ma l'accettazione di esse, sia pure notevolmente modificate o perfezionate, sarebbe, a rigore, subordinata a fatti sperimentali che sinora sono sempre mancati. Se prescindiamo però da tale giustificato scrupolo, vediamo come si presti meglio il secondo modello, ad una possibile, e sia pure, parziale interpretazione del fenomeno gravitazionale. Infatti con esso resterebbe spiegato, perchè non si osservi azione del mezzo, se questo è di piccolo spessore; potrebbe inoltre non accader lo stesso per spessori molto notevoli.

Per cui, sembra più probabile, nel caso del fenomeno gravitazionale, che esista un carattere del mezzo definibile come *potere assorbente*, piuttosto che come *permeabilità*. Ora, tale ordine di idee porterebbe a due conseguenze, che separatamente voglio prendere in esame:

1°) apparente diminuzione della massa materiale, causata dall'assorbimento;

⁽¹⁾ *Über die Zurückführung der Schwere auf Absorption.* Zsch. f. Math. u. Phys., 37, Supplement, p. 163, an. 1892.

2°) probabile equiparazione del fenomeno gravitazionale, ad una propagazione o trasmissione continua di energia a distanza.

Dirò subito che queste due conseguenze non presentano, secondo me e per ora, egual grado di probabilità. La prima assurge forse, per ragione di logica, e per la dimostrazione sperimentale di cui dirò più tardi, al grado di certezza. La seconda ha per ora un certo grado di probabilità, da stabilire; di essa dirò dunque, facendo tutte le riserve che sono del caso.

Massa vera e massa apparente. — La prima conseguenza porterebbe alla nozione di *massa vera* e di *massa apparente* dei corpi. La massa vera sarebbe quella che si dovrebbe prendere in esame, al limite, per una estrema suddivisione della materia: ciascuna particella di questa, eserciterebbe nel suo intorno, delle azioni sensibilmente proporzionali alla propria massa vera. Con l'accumularsi in una data località, di particelle materiali, le forze attrattive esercitanti fra queste ed altre masse esteriori, sarebbero proporzionali alla massa apparente, che risulterebbe, in conseguenza della *azione di schermo*, alquanto più piccola della vera. Il fisico e l'astronomo applicando la legge di Newton, e misurando le forze attrattive, tra masse necessariamente non piccolissime, non potrebbero osservare che il loro valore apparente. Inoltre, la distribuzione di tali forze non sarebbe così semplice, come vorrebbe quella legge. Per spiegare ciò, occorre anzitutto completare l'ipotesi fatta, dell'assorbimento, con l'altra che la forza elementare fra due particelle materiali poste in presenza, si svolga sempre secondo la congiungente di queste, ed il suo valore venga dato dalla legge di Newton, modificata secondo il principio dell'assorbimento progressivo. Nulla giustifica ancora tale ipotesi complementare; ma ricorro ad essa per la sua semplicità, benchè argomenti che non considero, possano in avvenire modificarla. Ciò posto, se prendiamo in esame p. e. l'azione attrattiva mutua fra due sfere materiali omogenee, è chiaro che essa si dovrà manifestare, anche col principio dell'assorbimento, secondo la congiungente i centri delle sfere: ciò per ragioni di simmetria. Ma non è però detto che i punti di applicazione delle due forze eguali e contrarie, siano precisamente i centri, come nel caso dello smorzamento nullo; certamente, anzi, sarebbero due punti alquanto più riavvicinati. Infatti, qualunque sia la legge dello smorzamento, le azioni elementari fra le particelle elementari delle località più riavvicinate delle due sfere verrebbero smorzate di meno. Concretata, o, meglio, constatata la legge dello smorzamento, l'analisi potrà stabilire la misura di tale riavvicinamento; dichiaro però di non avere avuto sinora tempo di approfondire la questione, sotto tal riguardo. È appena il caso di dire che più complicato si presenta il problema della attrazione fra una sfera ed una seconda massa non sferica, ed ancora più, quello fra corpi di forma qualsiasi.

Osservo poi che, in generale, la massa apparente di un corpo, può forse assumere valori differenti, a seconda della posizione del punto materiale su

cui il corpo esercita l'azione newtoniana. Si vede dunque che, se le ipotesi da me ora formulate sono attendibili, si apre un vasto campo di studio per il fisico e l'astronomo, chiamati a stabilire caso per caso i valori di quella grandezza.

Smorzamento della forza gravitazionale. — Le ipotesi fatte si basano sulla possibilità che, per una causa che non indago, il mezzo possa affievolire la propagazione della forza gravitazionale. Ho cercato se altri prima di me abbia per il passato formulata un'ipotesi del genere; ma, all'intuori di un vago accenno di H. Poincaré⁽¹⁾, nulla ho trovato. Quell'illustre fisico avrebbe ricorso all'idea dello smorzamento della gravitazione, per seguire l'idea di Arrhenius dell'infinità dell'universo. Se questa fosse giusta, egli dice, anzitutto il cielo ci dovrebbe apparire cosparso di stelle tutte riavvicinate, e quindi luminoso, in tutti i suoi punti, come il sole. Si potrebbe giustificare la mancanza di tale fenomeno, col dire che lo spazio interstellare assorba la luce, in misura sia pure minima; e quindi la maggioranza delle stelle, assai lontane, non invierebbe luce sino a noi. Ma la forza newtoniana esistente nei punti del nostro sistema solare dovrebbe però, secondo tale ipotesi, essere infinita od indeterminata, contrariamente a ciò che si osserva. Per tirarsi d'impaccio, dice Poincaré, e volendo ammettere l'infinità dell'universo di Arrhenius, si deve anche ammettere che *la legge di Newton non sia rigorosamente esatta*, e che la gravitazione subisca *una specie di assorbimento, traducendosi in un fattore esponenziale*. Ora, l'ipotesi dello smorzamento così formulata, è troppo vaga, e del resto il Poincaré non sembra dare ad essa troppo peso. Non si comprende se l'autore intenda che lo smorzamento sarebbe causato solo dalla materia delle stelle fraposte fra noi e l'infinito, od anche dal vuoto interstellare, benchè anche quest'ultima idea debba riscontrarsi nelle sue parole. Infatti, le stelle luminose della parte dell'universo a noi relativamente vicina, sono certamente poche: e cioè quelle che si vedono e che nell'insieme contribuiscono a stabilire, di notte, il debole grado di luminosità del cielo. Come lo stesso autore nota⁽²⁾, in cielo non vi debbono essere delle altre stelle *oscur*e, in misura notevole; ciò per considerazioni che l'autore stesso svolge (contrariamente a più antiche idee di lord Kelvin) e secondo le quali la maggior parte dei corpi celesti deve essere luminosa. Per cui, se anche, come sarebbe logico di ammettere, la parte lontanissima dell'universo (dove cioè si trovassero stelle che non arrivano a tramandar luce sino a noi) fosse costituita come la più vicina, anche là non vi sarebbero stelle oscure. La materia dunque, che potrebbe assorbire la forza gravitazionale, sarebbe quella che costituisce i *sol*i dell'universo, sia pure accompagnati dai loro piccoli pianeti e satelliti. È

(¹) *Les hypothèses cosmogoniques*, Préface, p. LXVII. Seconde édition 1913.

(²) loc. cit., p. LXV.

dunque assai poca cosa di fronte alla enormità degli spazii interstellari; e l'ipotesi di Poincaré, fatta a giustificazione dell'altra di Arrhenius, verrebbe completata dicendo che *anche il vuoto* debba assorbire la forza gravitazionale. Ciò va assai di là dai ragionamenti che qui ora svolgo; io mi limito invece ad avanzare l'ipotesi che sia proprio la materia, la causa dell'assorbimento della forza di gravitazione; e, non volendo arrivare a considerazioni che potrebbero diventare metafisiche, è mia intenzione di sottoporre quella ipotesi ad accurato esame, cercando di stabilire, ove sarà possibile, le necessarie verifiche sperimentali.

Applicazione al caso del sole. — Prima di andare avanti in queste considerazioni, occorre vedere se nulla, di già acquisito alla scienza, contraddica senz'altro il nuovo concetto di *massa apparente*. Sperimentalmente, sinora, niente giustifica tale concetto. Le nostre misure con la bilancia di Cavendish, sia pure molto perfezionate, o quella, già citata, di Laager, hanno sempre fatto vedere la *costanza della massa*, al variar del mezzo; ma ciò può spiegarsi con la mancanza di sensibilità negli apparecchi usati; e forse, con altri più sensibili, il risultato potrebbe esser diverso. Ora, prima di pensare alla costruzione di apparecchi del genere, sarà bene, uscendo dal nostro laboratorio, rivolgere l'attenzione ai fenomeni di fisica stellare, per vedere se nulla si opponga alla fatta ipotesi, e, meglio ancora, se da essi si possano ricavare i criterii direttivi nella costruzione suddetta.

Il caso che più probabilmente ci può offrire argomenti pro o contro la formulata ipotesi, è evidentemente quello del sole, che con la sua massa astronomica di 2.10^{33} grammi (338,000 volte quella della terra), rappresenta la più grandiosa agglomerazione di materia, a noi relativamente prossima. Questa è costituita dalla massa racchiusa nella fotosfera, chè quelle della cromosfera e della corona sono, di fronte ad essa, trascurabili. La densità media della massa solare risulta perciò di circa 1,41. Tutte le varie teorie sulla costituzione del sole, oggi accettate, ammettono naturalmente la esattezza di questa cifra; anzi ne fanno un punto di partenza per la deduzione di molte caratteristiche della struttura solare, quale la distribuzione delle densità, delle pressioni, delle temperature ecc. Ciò posto, è noto che, ammessa la temperatura superficiale del sole di circa 6000° , che certamente deve essere molto inferiore a quelle delle varie profondità, si dice che il sole sia costituito da una massa gassosa. Infatti esso è formato da elementi chimici, per la grande maggioranza a noi noti, ed i cui punti critici sono tutti al di sotto di 6000° . Ma si deve trattare di uno stato gassoso del tutto speciale; ciò perchè la vischiosità della materia, dovuta alla enorme pressione e alla densità media di 1,41 (assai grande per un corpo gassoso), lo fa rassomigliare di più allo stato liquido. Certamente si tratta di materia in condizioni del tutto diverse, da quelle che possono osservarsi o realizzarsi alla superficie della terra o nei nostri laboratori.

Comunque, appare a primo esame alquanto strana la conformazione esterna del sole con *bordì nettissimi*; infatti si potrebbe credere che una massa gassosa, libera di espandersi, dovesse piuttosto presentare bordi sfumati. L'imbarazzo del fisico nello spiegare tale nettezza dei bordi, apparisce evidente quando si esaminino le differenti ipotesi avanzate per spiegarla. Così Schmidt, Julius, Abbot⁽¹⁾ sarebbero d'avviso che quella nettezza sia dovuta ad un'illusione ottica. Più attendibile è però l'idea del Bigelow e di altri che fanno vedere come il fenomeno possa essere dovuto ad un effetto termodinamico e gravitazionale. I gas, con peso atomico superiore a 40, passerebbero, dentro 1/2000 del raggio solare, da una grande densità ad altra piccolissima ed evanescente, al di sopra della fotosfera. I gas più leggeri, a partire dal Ca (p. at. 40), esisterebbero invece in misura notevole anche ad altezze spropositate, come può avvenire per l'idrogeno delle protuberanze. Più recentemente uno studio del Véronnet⁽²⁾ mostra come i gas reali sieno caratterizzati dalla esistenza di un *volume limite*, con una densità dell'ordine di quella dei liquidi; e che la densità di essi crescerebbe, passando dalla cromosfera alla fotosfera, all'incirca da zero a quel valore, solo in una profondità di 5 km. Tutto ciò ho voluto richiamare, per stabilire che, già alla superficie del sole, si ammette debba esistere una densità notevole (altrimenti, non si vedrebbero i bordi netti).

Una seconda questione è quella di sapere come siano distribuite le densità della materia alle diverse profondità, nel sole. Ora il problema è legato all'altro della distribuzione delle temperature ed all'altro, ancora più incerto, anzi si può dire del tutto indeterminato, della proporzione con cui i vari elementi sono compresi nella massa solare. Comunque, per giustificare il valore di 1,41, della densità media, e partendo da un valore quasi trascurabile alla fotosfera⁽³⁾, alcune teorie⁽⁴⁾ portano ad ammettere al centro del sole una densità di 28,16 (Homer Lane) od anche di 31,5 (W. Thomson). Secondo altri poi, potrebbe esistere al centro del sole un nucleo addirittura liquido o solido⁽⁵⁾.

Queste ed altre citazioni, che per brevità non faccio, fanno vedere la grande incertezza che regna nelle teorie della costituzione interna del sole. Per cui, mi sembra, che esse non possano costituire argomenti atti a contraddire la ipotesi, che oggi formulo, dello smorzamento gravitazionale. La massa del sole di $2 \cdot 10^{33}$ gr. potrebbe, secondo tale ipotesi, non essere che *apparente*; e la *massa vera* potrebbe superar quella, anche di molto. Baste-

(1) Bigelow, *A. treatise on the sun's radiation*. New York, 1918, p. 79.

(2) Bulletin astron. de l'observ. de Paris, t. XXXV, p. 101, an. 1918.

(3) Ciò è, secondo me, in contraddizione col fatto della nettezza del bordo solare.

(4) Bosler, *Les théories modernes du soleil*, p. 188-202.

(5) Emden, Ann. d. Physik, VII, p. 176, 1902 e Bosler, loc. cit., pp. 217-231.

rebbe p. e., supporre l'esistenza nello interno del sole di corpi a forte densità, per giustificare tale nuovo fatto, e nessuna delle teorie citate sarebbe sufficiente per lasciar negare la possibilità di ciò.

Farò vedere presto con quali criterii sono riuscito a stabilire un ordine di grandezza probabile, del sospettato fenomeno ed a realizzare una esperienza di controllo, della esistenza di questo.

Meccanica. — *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approssimazione)*. Nota I di UMBERTO CRUDEL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

Nello studio, in idrodinamica, delle onde progressive di tipo permanente, il Levi-Civita pervenne ⁽²⁾ all'equazione

$$(1) \quad \frac{d}{df} \left\{ w(f+iq) w(f-iq) \right\} - iq \left\{ \frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)} \right\} = 0,$$

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1919.

⁽²⁾ Rend. della R. Accad. dei Lincei, II sem. 1907, pag. 77.

Si pensi ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basterà allora studiare cotesto moto in una sezione parallela a coteste sponde. I caratteri qualitativi del moto stesso vengono supposti essere quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. La qualifica « permanente » sta qui a significare che, per un osservatore dotato della velocità di propagazione, il movimento ha carattere stazionario. Detta c la grandezza di cotesta velocità di propagazione ed assunto un sistema di assi x, y , animati dalla stessa velocità, avremo che le componenti della velocità in discorso saranno $-c, 0$, supponendo orizzontale il fondo del canale ed intendendo l'asse y verticale e l'asse x , scorrente sul fondo, rivolto in senso opposto alla traslazione. La regione del moto sarà rappresentata, nel piano xy , da una striscia L , semplicemente connessa, indefinita, limitata, inferiormente, dall'asse x e, superiormente, da una linea libera l . Qualora questa linea consti di tratti riproducentisi periodicamente, le onde diconsi *oscillatorie*; diversamente si ha un tipo di onde, che comprende (come caso particolare) il caso dell'onda *solitaria*, studiata, sperimentalmente, da Scott Russell, da Darcy, da Bazin, e, teoricamente [in via approssimata], da Boussinesq e da lord Rayleigh. Il movimento del liquido nella striscia L , semplicemente connessa, viene supposto ovunque regolare ed irrotazionale. Esisterà, perciò, il potenziale $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità) uniforme e regolare in L . La funzione φ sarà funzione armonica, a motivo della incompressibilità del fluido; quindi si potrà definire la funzione associata ψ (detta funzione di corrente). Denotate con u e v le componenti della velocità *relativa* del fluido in un generico punto (x, y) , ammetteremo naturalmente che sia positivo il limite inferiore dei valori di u , dovendosi, ogni singola particella fluida, ritenere dotata di velocità assoluta non rilevante in confronto alla velocità di propagazione $(-c, 0)$, in modo, cioè, che la suddetta velocità relativa possa differire soltanto di poco dalla $(c, 0)$. Ciò premesso posto $\varphi + i\psi = f, u - iv = w$, e consi-