ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

rebbe p. e., supporre l'esistenza nello interno del sole di corpi a forte densità, per giustificare tale nuovo fatto, e nessuna delle teorie citate sarebbe sufficiente per lasciar negare la possibilità di ciò.

Farò vedere presto con quali criterii sono riuscito a stabilire un ordine di grandezza probabile, del sospettato fenomeno ed a realizzare una esperienza di controllo, della esistenza di questo.

Meccanica. — *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approsssimazione).* Nota I di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (1).

Nello studio, in idrodinamica, delle onde progressive di tipo permanente, il Levi-Civita pervenne (2) all'equazione

$$(1)\qquad \frac{d}{df}\left\{ w(f+iq)\, w(f-iq) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)} \right\} = 0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1919.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, II sem. 1907, pag. 77.

Si pensi ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basterà allora studiare cotesto moto in una sezione parallela a coteste sponde. I caratteri qualitativi del moto stesso vengono supposti essere quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. La qualifica « permanente » sta qui a significare che, per un osservatore dotato della velocità di propagazione, il movimento ha carattere stazionario. Detta c la grandezza di cotesta velocità di propagazione ed assunto un sistema di assi x, y, animati dalla stessa velocità, avremo che le componenti della velocità in discorso saranno $-c$, o, supponendo orizzontale il fondo del canale ed intendendo l'asse y verticale e l'asse x, scorrente sul fondo, rivolto in senso opposto alla traslazione. La regione del moto sarà rappresentata, nel piano xy, da una striscia L, semplicemente connessa, indefinita, limitata, inferiormente, dall'asse x e, superiormente, da una linea libera l. Qualora questa linea consti di tratti riproducentisi periodicamente, le onde diconsi *oscillatorie*; diversamente si ha un tipo di onde, che comprende (come caso particolare) il caso dell'*onda solitaria*, studiata, sperimentalmente, da Scott Russell, da Darcy, da Bazin, e, teoricamente [in via approssimata], da Boussinesq e da lord Rayleigh. Il movimento del liquido nella striscia L, semplicemente connessa, viene supposto ovunque regolare ed irrotazionale. Esisterà, perciò, il potenziale $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità) uniforme e regolare in L. La funzione φ sarà funzione armonica, a motivo della incompressibilità del fluido; quindi si potrà definire la funzione associata ψ (detta funzione di corrente). Denotate con u e v le componenti della velocità *relativa* del fluido in un generico punto (x, y), ammetteremo naturalmente che sia positivo il limite inferiore dei valori di u, dovendosi, ogni singola particella fluida, ritenere dotata di velocità assoluta non rilevante in confronto alla velocità di propagazione $(-c, o)$, in modo, cioè, che la suddetta velocità relativa possa differire soltanto di poco dalla (c, o). Ciò prem[illegible] posto $\varphi + i\psi = f$, $u - iv = w$, e consila quale può dirsi insieme differeziale e alle differenze finite. In essa $i=\sqrt{-1}$, mentre g è la grandezza dell'accelerazione della gravità ed f è la variabile complessa $\varphi+i\psi$; tutto essendo ricondotto alla determinazione d'integrali $w(f)$ della (1), reali sull'asse reale, regolari nella striscia $\overline{\psi=\pm q}$, finiti all'infinito e tali che la loro parte reale non scenda, in cotesta striscia, al disotto di una costante positiva (del resto, comunque piccola). Il caso, poi, che si tratti di onde oscillatorie, si traduce analiticamente nella periodicità di $w(f)$ (con periodo reale); per cui, allora, posto $\xi=e^{\frac{2\pi i f}{\omega}}$ (dove ω rappresenta il periodo), la funzione $w(f)$ diventa funzione uniforme e regolare della variabile complessa ξ nella corona corrispondente, nel piano ξ, alla suddetta striscia. Posto, inoltre, $\alpha=e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$ (con che α resulta frazione propria), la corona C, corrispondente alla striscia $\overline{\psi=\pm q}$, si trova limitata, internamente, dalla circonferenza $|\xi|=\alpha$ e, esternamente, dalla circonferenza $|\xi|=\frac{1}{\alpha}$. E la equazione (1) si trasforma nella seguente:

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left\{w(\alpha\xi)\,w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}-\frac{g\omega}{2\pi}\left\{\frac{1}{w(\alpha\xi)}-\frac{1}{w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\right\}=0\,.$$

Le condizioni qualitative, imposte alla w, saranno allora le seguenti: essere regolare nella corona C; essere reale sulla circonferenza $|\xi|=1$; essere tale che la sua parte reale non scenda, in tutta la C, al disotto di una costante positiva.

Posto $w=c\,(1+\varepsilon)$ (dove con c denoteremo la velocità di propagazione), avremo che l'equazione delle onde progressive di tipo permanente, nel caso si tratti di onde oscillatorie, potrà scriversi (col noto significato dei simboli)

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}+\frac{g\omega}{2\pi c^3}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)-\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}=$$
$$=-\xi\left\{\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)+\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}\frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}$$

la quale si trasforma in sè stessa nello scambio di ξ in $\frac{1}{\xi}$. L'equazione

---

derato un piano di Gauss rappresentativo dei valori f, sul quale la striscia L viene rappresentata in modo conforme dalla striscia limitata delle rette $\psi=0$ e $\psi=q$ (essendo q la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale, nell'ipotesi di ritenere unitaria la densità del liquido), il Levi-Civita pervenne a caratterizzare il problema meccanico, relativo al suddetto moto di un liquido pesante, mediante la equazione funzionale superiormente riprodotta.

in discorso può, brevemente, scriversi $A(\varepsilon)=B(\varepsilon)$, dove A, come si vede, è un operatore lineare (nei riguardi di ε e della sua derivata), mentre B è un operatore non lineare.

L'equazione considerata dal Levi-Civita come caratteristica delle soluzioni approssimate è la equazione $A(\varepsilon)=0$. Ora, supponendo α sviluppabile in serie di potenze intere e positive di un parametro μ, cioè $\alpha=\alpha_1+S(\mu)$, riterremo, in prima approssimazione, $\alpha=\alpha_1$. Corrispondentemente l'equazione $A(\varepsilon)=0$ verrà scritta

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha_1\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right)\right\}+\frac{g\omega}{2\pi c^3}\left\{\varepsilon(\alpha_1\xi)-\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right)\right\}=0. \tag{2}$$

Di questa equazione denoteremo con ε_1 la soluzione (privata del termine costante) uniforme e regolare in C e reale sulla circonferenza $|\xi|=1$. Sicchè $\varepsilon_1(\xi)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}a_{1s}\xi^s$ (con $a_{10}=0$). Mediante sostituzione nella (2), si osservi che dovremo avere identicamente

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{s(\alpha_1^s+\alpha_1^{-s})+k(\alpha_1^s-\alpha_1^{-s})\right\}a_{1s}\xi^s=0,$$

dove $k=\frac{g\omega}{2\pi c^3}$. Quindi, non tutti i coefficienti a_{1s} essendo nulli, è necessario che esista un intero $|m|$ tale che

$$m\left(\alpha_1^m+\frac{1}{\alpha_1^m}\right)+k\left(\alpha_1^m-\frac{1}{\alpha_1^m}\right)=0, \tag{3}$$

cioè

$$\alpha_1^{2m}=\frac{k-m}{k+m},$$

condizione che supponiamo soddisfatta. Si noti, incidentalmente, la conseguente restrizione $k>|m|$. Ciò premesso, si osservi che non possono esistere due interi $|m|$, fra loro diversi, tali che la (3) resulti, da entrambi, soddisfatta. Infatti, dalla (3), si ha $\frac{m(\alpha_1^{2m}+1)}{1-\alpha_1^{2m}}=k$. Ora, se esistessero due valori positivi di ν, in corrispondenza ai quali l'espressione $\frac{\nu(\alpha_1^{2\nu}+1)}{1-\alpha_1^{2\nu}}$ (considerata come funzione di ν) assumesse valori fra loro eguali, dovrebbe esistere almeno un valore positivo di ν annullante la prima derivata di cotesta funzione; cioè dovrebbe essere, per un certo ν positivo,

$$\alpha_1^{4\nu}-4\nu\alpha_1^{2\nu}\log\alpha_1=1.$$

Ma, per $\nu=0$, il primo membro di cotesta eguaglianza vale uno; dunque dovrebbe esistere anche un valore positivo di ν annullante la prima derivata della funzione $\alpha_1^{4\nu} - 4\nu\,\alpha_1^{2\nu}\log\alpha_1$. Dovrebbe, pertanto, aversi pure

$$\alpha_1^{2\nu} - 2\nu\log\alpha_1 = 1$$

in corrispondenza ad un certo ν positivo. E quindi, con ragionamento analogo, anche $\alpha_1^{2\nu} = 1$ per un certo valore positivo di ν. Il che è assurdo, essendo α_1 reale e diverso dall'unità.

La $\varepsilon_1(\xi)$ resulta dunque espressa mediante $a_{1,m}\,\xi^m + a_{1,-m}\,\xi^{-m}$, in cui porremo $a_{1,m} = \mu_1 + i\mu_2$, $a_{1,-m} = \mu_1 - i\mu_2$, affinchè essa resulti reale sulla circonferenza $|\xi| = 1$.

Noi assumeremo $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = \mu$; sicchè

$$\varepsilon_1(\xi) = \mu(\xi^m + \xi^{-m}).$$

Per semplicità, supporremo $|m| = 1$; ed avremo così la soluzione di Airy, $\varepsilon_1(\xi) = \mu(\xi + \xi^{-1})$, dell'equazione (2), dove, in tal caso, $\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}$ (intendendo preso del radicale il valore aritmetico).

Ora, si consideri l'equazione $\mathrm{A}(\varepsilon) = \mathrm{B}(\varepsilon_1)$. Ivi si metta $\alpha_1(1 - \alpha_2\mu^\sigma)$ al posto di α, ed $\alpha_1^{-1}(1 + \alpha_2\mu^\sigma)$ al posto di α^{-1}; e, inoltre, si metta $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \mu^h \sum\limits_2^{+\infty} a_{2s}(\xi^s + \xi^{-s})$ al posto di ε. Dopo avere osservato che il secondo membro $\mathrm{B}(\varepsilon_1)$ contiene μ^3 come fattore comune, si assumino $\sigma = 2$, $h = 3$ e si trascurino nella $\mathrm{A}(\varepsilon_2) = \mathrm{B}(\varepsilon_1)$ i termini che contengono μ con grado superiore al terzo; poi si dividano ambo i membri per μ^3. Avremo, così, identicamente,

$$\begin{aligned} \alpha_2 \left\{ \alpha_1 - \alpha_1^{-1} + k(\alpha_1 + \alpha_1^{-1}) \right\} (\xi - \xi^{-1}) + \\ + \sum_2^{+\infty} \left\{ s(\alpha_1^s + \alpha_1^{-s}) + k(\alpha_1^s - \alpha_1^{-s}) \right\} a_{2s}(\xi^s - \xi^{-s}) = \\ = 2(\alpha_1 + \alpha_1^{-1})(\xi - \xi^{-1} + \xi^3 - \xi^{-3}). \end{aligned}$$

Intanto, $a_{2s} = 0$ per $s \neq 3$.

Inoltre, tenendo presente che $\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}$, resulta

$$\alpha_2 = \frac{2k}{k^2 - 1},$$

e, infine,

$$a_{23} = \frac{k^2 - 1}{4}.$$

Nell'ipotesi di validità del metodo di approssimazioni successive che scaturisce manifesto dalle presenti considerazioni, ritenendo la funzione di Airy, $\varepsilon_1 = \mu(\xi + \xi^{-1})$, come soluzione in prima approssimazione della equazione A (ε) = B (ε), potremo riguardare la funzione

$$\varepsilon_2 = \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{k^2 - 1}{4} \mu^3 (\xi^3 + \xi^{-3})$$

come soluzione in *seconda approssimazione* dell'equazione medesima.

Per una prossima Nota ci riserviamo lo studio di dettaglio connesso con cotesta seconda approssimazione (formazione esplicita dell'equazione del pelo libero; espressioni delle componenti di velocità, ecc.) ed il raffronto coi resultati di Stokes.

Meccanica. — *Deviazione dei raggi luminosi in un campo elettrico o magnetico uniforme, secondo la teoria di Einstein.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Supposto che uno strato di spessore l, occupato da un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), sia sottoposto all'azione di un campo elettrico o magnetico uniforme, normale alle faccie dello strato e di intensità C, lo spazio ivi compreso non rimane più, secondo la teoria di Einstein, rigorosamente euclideo, ma si atteggia a varietà normale del Bianchi.

Inoltre la velocità della luce non è più $c = 3.10^{10}$ cm/sec, come in assenza di ogni causa perturbatrice, ma varia da punto a punto del campo; e parimenti l'andamento dei raggi non è più rettilineo.

Nella presente Nota determino l'andamento d'un raggio nello strato, ottenendo il valore per la deviazione del medesimo, supposto che confini con continuità ottica, cioè senza dar luogo a rifrazione, con un mezzo in cui la velocità della luce è c.

Nell'ultimo paragrafo studio numericamente la formola ottenuta, dimostrando la pratica impossibilità di misurare direttamente tale deviazione con esperienze da laboratorio. Non sarebbe forse invece improbabile mettere in evidenza qualche divario con esperienze interferenziali.

1. *Richiamo di alcune formole* [2]. — Nell'ipotesi precedente, di un campo elettrico (magnetico) uniforme, il Levi-Civita dimostra che, se

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1919.

[2] Vedi T. Levi-Civita, *Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, Rend. Lincei, 20 maggio 1917.