# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Nell'ipotesi di validità del metodo di approssimazioni successive che scaturisce manifesto dalle presenti considerazioni, ritenendo la funzione di Airy, $\varepsilon_1 = \mu(\xi + \xi^{-1})$, come soluzione in prima approssimazione della equazione $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, potremo riguardare la funzione

$$\varepsilon_2 = \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{k^2 - 1}{4} \mu^3 (\xi^3 + \xi^{-3})$$

come soluzione in *seconda approssimazione* dell'equazione medesima.

Per una prossima Nota ci riserviamo lo studio di dettaglio connesso con cotesta seconda approssimazione (formazione esplicita dell'equazione del pelo libero; espressioni delle componenti di velocità, ecc.) ed il raffronto coi resultati di Stokes.

## Meccanica. — *Deviazione dei raggi luminosi in un campo elettrico o magnetico uniforme, secondo la teoria di Einstein.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Supposto che uno strato di spessore $l$, occupato da un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), sia sottoposto all'azione di un campo elettrico o magnetico uniforme, normale alle faccie dello strato e di intensità C, lo spazio ivi compreso non rimane più, secondo la teoria di Einstein, rigorosamente euclideo, ma si atteggia a varietà normale del Bianchi.

Inoltre la velocità della luce non è più $c = 3.10^{10}$ cm/sec, come in assenza di ogni causa perturbatrice, ma varia da punto a punto del campo; e parimenti l'andamento dei raggi non è più rettilineo.

Nella presente Nota determino l'andamento d'un raggio nello strato, ottenendo il valore per la deviazione del medesimo, supposto che confini con continuità ottica, cioè senza dar luogo a rifrazione, con un mezzo in cui la velocità della luce è $c$.

Nell'ultimo paragrafo studio numericamente la formola ottenuta, dimostrando la pratica impossibilità di misurare direttamente tale deviazione con esperienze da laboratorio. Non sarebbe forse invece improbabile mettere in evidenza qualche divario con esperienze interferenziali.

1. *Richiamo di alcune formole* [2]. — Nell'ipotesi precedente, di un campo elettrico (magnetico) uniforme, il Levi-Civita dimostra che, se

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1919.

(2) Vedi T. Levi-Civita, *Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, Rend. Lincei, 20 maggio 1917.

$\varphi = - Cz$ è il potenziale del campo, il $ds^2$ dello spazio è dato da

$$(1) \qquad ds^2 = dz^2 + dx_1^2 + \operatorname{sen}^2 \frac{x_1}{R} dx ,$$

dove

$$(2) \qquad R = \frac{c^2}{\sqrt{f} . C} ,$$

essendo $f = 6{,}6 . 10^{-8}$ (CGS) la costante dell'attrazione universale.

La velocità della luce è data allora dalla relazione

$$(3) \qquad V = c_1 e^{\frac{z}{R}} + c_2 e^{-\frac{z}{R}} ,$$

con $c_1$, $c_2$ costanti da determinarsi.

Supporremo d'ora innanzi che $\frac{x_i}{R}$, $\frac{z}{R}$ (puri numeri) sieno tali da poterne trascurare le potenze superiori alla seconda: ipotesi ampiamente giustificata dall'ordine di grandezza di R.

In tale ipotesi il $ds^2$ si può considerare euclideo. Infatti le superfici $z =$ cost. hanno per metrica

$$dx_1^2 + \operatorname{sen}^2 \frac{x_1}{R} dx_2^2 ,$$

che per l'ipotesi precedente ponendo $\operatorname{sen}^2 \frac{x_1}{R} = \left(\frac{x_1}{R}\right)^2$, si può scrivere

$$dx^2 + x_1^2 d \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 ,$$

che è l'elemento lineare del piano in coordinate polari $\left(x_1 \equiv \varrho , \frac{x_2}{R} \equiv 0\right)$.

La (1) si può quindi ridurre alla forma euclidea

$$(1') \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ,$$

quando si introducano coordinate cartesiane ortogonali.

Prenderemo allora per piano $z = 0$ il piano mediano dello strato.

2. *Velocità della luce: andamento del raggio luminoso.* — Le costanti $c_1$, $c_2$ della (3) dovranno essere calcolate come segue: Per $z = -\frac{l}{2}$ e $z = \frac{l}{2}$, deve essere $V = c$. Scrivendo allora la (3) sotto la forma

$$V = \gamma_1 \cos h \frac{z}{R} + \gamma_2 \operatorname{sen} h \frac{z}{R} .$$

si trova immediatamente, colle date condizioni ai limiti dello strato,

$$V = \frac{c}{\cos h \frac{l}{2R}} \cos h \frac{z}{R}. \tag{3'}$$

Ora l'andamento dei raggi luminosi corrisponde all'equazione variazionale

$$\delta \int \frac{ds}{V} = 0 \text{ (1)}, \tag{4}$$

e quindi, ricordando la (1') e osservando che a noi importa solo l'andamento dei raggi, possiamo dire che il nostro problema è ridotto a considerare le traiettorie del problema dinamico ordinario, in cui il potenziale sia

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 h \frac{z}{R}}, \tag{5}$$

e l'energia totale nulla, il che dà la condizione

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U. \tag{6}$$

Ora, nel nostro ordine di approssimazione,

$$U = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right). \tag{5'}$$

Ne risulta, dalla (6), per il quadrato della velocità iniziale, il valore

$$v_0^2 = 1 - \frac{l^2}{4R^2}. \tag{6'}$$

Il nostro problema è ora ridotto al seguente problema elementare di meccanica:

Un punto materiale parte dalla posizione $\left(0, 0, -\frac{l}{2}\right)$ con velocità di grandezza $v_0$, avente una data direzione, sotto l'azione del potenziale unitario (5'). Quale ne è la traiettoria?

(1) Vedi T. Levi-Civita, *Statica einsteiniana*, § 4. Rend. Lincei, 6 maggio 1917. — A. Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*, Nuovo Cimento, luglio 1917.

Appare intanto ch'essa è piana: quindi, preso tale piano per piano $zx$, avremo le equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 0 \quad , \quad \ddot{z} = -\frac{z}{R^2}, \tag{7}$$

colle condizioni

$$x = 0 \quad , \quad z = -\frac{l}{2} \quad , \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha_1 \quad , \quad \dot{z} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 ,$$

per $t = 0$, indicando con $\alpha_1$ l'angolo del raggio coll'asse $x$.

Con tali condizioni si ottiene immediatamente

$$\left\{ \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha_1 \, . \, t , \\ z &= -\frac{l}{2} \cos \frac{t}{R} + R \, v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \frac{t}{R} . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Osserviamo ora che, se non ci fosse perturbazione, si avrebbe $R = \infty$ e quindi $v_0 = 1$. La traiettoria sarebbe rettilinea e il mobile impiegherebbe il tempo $T_0 = \dfrac{l}{\operatorname{sen} \alpha_1}$ per attraversare lo strato: del rapporto $\dfrac{T_0}{R}$ si possono trascurare le potenze superiori alla seconda.

Essendovi la perturbazione, il tempo T necessario per attraversare lo strato deve differire da $T_0$ per quantità dell'ordine almeno di $\dfrac{l}{R}$. La conclusione precedente deve quindi valere per T e per ogni $t < T$, onde potremo scrivere le (8), limitando gli sviluppi di sen e cos $\dfrac{t}{R}$ alle seconde potenze,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha_1 \, t , \\ z &= -\frac{l}{2} \left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) + v_0 \operatorname{sen} \alpha \, . \, t . \end{aligned} \right. \tag{8'}$$

Dalla seconda delle (8') si ricava, per $z = \dfrac{l}{2}$,

$$T = \frac{R^2 v_0 \operatorname{sen} \alpha_1}{l} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{l^2}{R^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1}} \right),$$

ed anche, ricordando che

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \cdots ,$$

si ottiene

$$T = \frac{l}{v_0 \operatorname{sen} \alpha_1},$$

e quindi, per la (6′),

$$T = \frac{l}{\operatorname{sen} \alpha_1}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{l^2}{R^2}\right). \tag{9}$$

È facile ora calcolare $\operatorname{tang} \beta_1$, essendo $\beta_1$ l'angolo che la tangente alla traiettoria nel punto $z = \frac{l}{2}$ fa coll'asse $x$. Sarà

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{z=\frac{l}{2}} = \left(\frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}\right)_{t=T}.$$

Avremo

$$\frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{lt}{R^2} + v_0 \operatorname{sen} \alpha_1\right) \cdot \frac{l}{v_0 \cos \alpha_1} = \frac{l}{R^2}\left(1 + \frac{l^2}{8R^2}\right)\frac{t}{\cos \alpha_1} + \operatorname{tang} \alpha_1 .$$

Per $t = T$, nel nostro ordine di approssimazione, si ha così

$$\operatorname{tag} \beta_1 = \frac{l^2}{R^2}\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1} + \operatorname{tag} \alpha_1 . \tag{10}$$

Appare di qui che $\operatorname{tag} \beta_1 - \operatorname{tag} \alpha_1$ è dell'ordine di $\frac{l^2}{R^2}$; tale sarà quindi anche $\beta_1 - \alpha_1$, onde potremo scrivere

$$\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1}$$

quando si sviluppi il primo membro in serie di Taylor limitata al primo termine: per la (10), ed esprimendo in secondi,

$$(\beta_1 - \alpha_1)'' = \frac{l^2}{R^2}\frac{\cot \alpha_1}{\operatorname{sen} 1''} . \tag{10′}$$

La (10′) dà il divario dalla ordinaria teoria, nella quale $\beta_1 - \alpha_1 = 0$: tale divario è del secondo ordine.

3. *Apprezzamenti numerici.* — La formola (10′) si presta bene ad un apprezzamento numerico. Volendo porci nelle condizioni più favorevoli per osservare il divario dall'ordinaria teoria, supporremo $\alpha_1$ prossimamente zero, per esempio $\alpha_1 = 0'',1$; allora

$$\log \frac{\cot 0''.1}{\operatorname{sen} 1''} = 12{,}6288502 .$$

Inoltre

$$\frac{1}{R^2} = \frac{f \cdot C^2}{c^4} = \frac{6{,}6 \times 10^{-8} \times C^2}{3^4 \times 10^{40}} .$$

Arrotondiamo il log ponendolo eguale a 13, e poniamo inoltre $\frac{6,6}{3^4}$ approssimativamente eguale a $\frac{1}{10}$. Ne viene

$$(\beta_1 - \alpha_1)'' = \frac{l^2\, C^2}{10^{36}}.$$

Cosicchè, ponendo $l = 10^m$ cm., $C = 10^n$ (gauss se si tratta d'un campo magnetico, $\frac{1}{300}$ di volt se di campo elettrostatico), perchè la differenza $(\beta_1 - \alpha_1)''$ raggiunga un secondo, occorre che

$$m + n = 18.$$

Quest'ultimo risultato fa vedere l'impossibilità di misurare direttamente l'angolo di deviazione con esperienze di laboratorio: al massimo si potrebbe avere allora $l = 100$ cm., perciò $m = 2$. Dovrebbe essere $n = 16$ e quindi il campo di un ordine di grandezza tale che i mezzi attuali non ci consentono di produrre.

## Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* (¹). Nota II del professore S. Sàlaghi, presentata dal Socio A. Ruffini (²).

Ad un più attento esame della nostra tavola raffigurante la « linea della consonanza lungo la serie armonica », già pubblicata e discussa in questi Rendiconti (³), si osserva che gli armonici *dispari*, cominciando dal settimo, provengono puramente dai suoni simmetrici, che sono stati da noi inseriti; laddove gli armonici pari sono multipli di note appartenenti alla gamma, oppure multipli dei suoni simmetrici che erano stati inseriti nelle ottave precedenti: così 14 multiplo di 7, 18 di 9, 22 di 11, 26 di 13, 28 di 7, 30 di 15 (⁴).

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di terapia fisica della R. Università di Bologna.

(²) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1919.

(³) Questi Rendiconti

(⁴) Specialmente dunque gli armonici *dispari*, sempre cominciando dal settimo, offrono intervalli musicali assolutamente nuovi, estranei alla nostra scala. Tanto è vero che siamo stati noi stessi ad intercalarli tra le varie note negli spazi convenienti.

Parecchi di questi intervalli nuovi non potrebbero legittimamente denotarsi, neppure per approssimazione, cogli ordinarî segni di intonazione. Tali sono tra gli altri il settimo,