ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie spirali.* Nota II del Socio Luigi Bianchi [1].

5. Dimostriamo ora che fra le superficie d'elemento lineare (II) le spirali sono caratterizzate dalle proprietà che *la superficie* $\overline{S}$ *corrispondente per ortogonalità d'elementi alla* S *si riduce ad un piano.* Per questo cominciamo dal provare che ogni superficie d'elemento lineare (II) ammette particolari configurazioni (in una doppia infinità) per le quali la superficie $\overline{S}$ definita dalle (12) diventa un piano. Assumendo questo piano per piano xy dovremo cercare quelle configurazioni nelle quali si annulli la $\overline{z}$ data dalla terza delle (12), cioè si abbia

$$z = v\,\psi(u),$$

con $\psi(u)$ funzione della sola u. Questa $\psi(u)$ sarà dunque da determinarsi in guisa [2] che la forma differenziale quadratica

$$v^2\,du^2 + U^2\,dv^2 - dz^2 = v^2\,du^2 + U^2\,dv^2 - [v\psi'(u)\,du + \psi(u)\,dv]^2$$

risulti a curvatura nulla e sia inoltre definita positiva. Ora i coefficienti E, F, G di questa forma differenziale sono

$$E = v^2(1 - \psi'^2) \quad , \quad F = -\,v\psi\psi' \quad , \quad G = U^2 - \psi^2,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1919.
(2) Cfr. *Lezioni*, vol. I, § 109, pag. 240.

indi

$$\sqrt{EG - F^2} = v^2 \sqrt{U^2 - U^2 \psi'^2 - \psi^2}\,.$$

Se ne eguagliamo a zero la curvatura K_0 colla nota formola ([1])

$$2K_0 \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right\},$$

dove si osservi che le tre quantità

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}\,, \quad \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}$$

sono indipendenti da v, mentre l'altra

$$\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}$$

risulta eguale a $-2UU'$; ne risulta, per la funzione incognita $\psi(u)$, la equazione differenziale

$$\frac{d}{du}\left(\frac{UU'}{\sqrt{U^2 - U^2\psi'^2 - \psi^2}}\right) = 0\,,$$

coll'integrale primo

$$U^2 - U^2\psi'^2 - \psi^2 = c^2 U^2 U'^2 \quad (c \text{ costante}).$$

Non resta quindi altro che determinare $\psi(u)$ dall'equazione differenziale del 1° ordine

$$\psi'^2 + \frac{\psi^2}{U^2} = 1 - c^2 U'^2\,, \tag{16}$$

la cui integrazione introduce una nuova costante arbitraria ([2]), e ne risulta che il problema proposto ammette in effetto una doppia infinità di soluzioni. Di più le ∞^2 superficie (spirali), così definite, sono tutte differenti per la forma, come constatiamo calcolando i corrispondenti valori di D, D', D'' dalle formole

$$D = \frac{z_{11}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}\,, \quad D' = \frac{z_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}\,, \quad D'' = \frac{z_{22}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}\,.$$

([1]) *Lezioni*, vol. I, pag. 93.

([2]) Per l'integrazione delle equazioni di questo tipo vedi Darboux, *Leçons*, IV$^{\text{ème}}$ Partie, note VI, p. 442 ss.

Siccome $z = v\psi(u)$, e dalla (16)

$$\Delta_1 z = 1 - c^2 U'^2,$$

ne deduciamo

$$(17) \qquad D = \frac{v(U^2\psi'' + \psi)}{cU^2 U'} \quad , \quad D' = -\frac{\psi}{cU} \quad , \quad D'' = \frac{U\psi'}{cv} ,$$

e da queste formole si vede che al variare della costante c, e dell'altra introdotta dalla integrazione, variano D, D', D'' e cangia quindi la configurazione della superficie.

6. Fra le superficie d'elemento lineare (II) le superficie spirali sono appunto caratterizzate dalla proprietà che: *Ogni superficie spirale* S *corrisponde per ortogonalità d'elementi ad un piano fisso in guisa che il piano tangente in ogni punto* P *di* S *passa pel punto corrispondente* $\overline{P}$ *del piano.*

Partendo da questa definizione delle superficie spirali, formiamo subito un'equazione a derivate parziali del 1° ordine di cui queste superficie sono gli integrali, e ne deduciamo le ordinarie equazioni in termini finiti. Sia $z = z(x, y)$ l'equazione della supposta superficie S e prendiamo il piano fisso per piano xy a cui facciamo corrispondere la S per ortogonalità d'elementi. Indicando con $\overline{x}, \overline{y}$ le coordinate del punto $\overline{P}$ sul piano $\overline{z} = 0$ che corrisponde al punto $P \equiv (x, y, z)$ della S, le formole di corrispondenza, disponendo dell'origine, possono scriversi

$$\overline{x} = \frac{y}{h} \quad , \quad \overline{y} = -\frac{x}{h},$$

dove h è una costante [1]. E se esprimiamo che il piano tangente in (x, y, z) alla S passa pel detto punto $\overline{P} \equiv \left(\frac{y}{h}, -\frac{x}{h}, 0\right)$, troviamo per z la equazione del 1° ordine

$$(hx - y)\frac{\partial z}{\partial x} + (hy + x)\frac{\partial z}{\partial y} = hz \text{ [2]},$$

che, introducendo coordinate cilindriche (r, θ, z) col porre

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

si scrive

$$hr\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \theta} = hz .$$

[1] Cfr. **Lezioni**, vol. II, pag. 3, nota.

[2] Questa esprime che la superficie ammette la trasformazione conforme infinitesima:

$$Xf = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + h\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Cfr. Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen.*

L'integrale generale è

$$z e^{-h\theta} = \Phi(r e^{-h\theta}),$$

dove Φ indica una funzione arbitraria, e questa ci dà l'equazione in termini finiti delle superficie spirali. In forma parametrica, indicando con θ, u i parametri, si scriverà

$$x = \mathrm{U} e^{h\theta} \cos\theta \quad , \quad y = \mathrm{U} e^{h\theta} \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \mathrm{U}_1 e^{h\theta}, \tag{18}$$

dove U, U_1 rappresentano funzioni arbitrarie del parametro u. Sotto questa forma è evidente che le linee $u = \mathrm{cost.}$ sono eliche cilindro-coniche [1] descritte su coni circolari retti col vertice nell'origine, aventi per asse di rotazione l'asse Oz.

Si verifica subito, sulle (18), che: *la tangente in un punto* (x, y, z) *all'elica cilindro-conica incontra il piano* xy *nel punto* $\left(\frac{y}{h}, -\frac{x}{h}, 0\right)$, *centro di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle eliche* $u = \mathrm{cost.}$

7. Risulta dal § 4 che, per riconoscere se una data superficie S è applicabile sopra una superficie spirale, basta esaminare se esiste una superficie $\overline{\mathrm{S}}$, corrispondente per ortogonalità di elementi alla S, i cui singoli punti $\overline{\mathrm{P}}$ giacciano nei piani tangenti alla S nei punti corrispondenti P. Se la S è riferita ad un sistema ortogonale qualunque con

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

le coordinate $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di $\overline{\mathrm{P}}$ potranno scriversi, nelle solite notazioni,

$$\bar{x} = x + \mathrm{AX}_1 + \mathrm{BX}_2 \;,\; \bar{y} = y + \mathrm{AY}_1 + \mathrm{BY}_2 \;,\; \bar{z} = z + \mathrm{AZ}_1 + \mathrm{BZ}_1 ,$$

dove A, B sono funzioni di u, v. Le condizioni di corrispondenza per ortogonalità d'elementi fra S, $\overline{\mathrm{S}}$ si traducono per A, B nel sistema delle tre equazioni simultanee

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \sqrt{\mathrm{E}} = 0 \\ &\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{E}}} \frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}} = 0 \\ &\sqrt{\mathrm{E}} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} - \mathrm{B} \frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} - \mathrm{A} \frac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0, \end{aligned} \right.$$

le quali dunque ammettono soluzioni nel solo caso che la S sia applicabile sopra una superficie spirale. Ora proviamo che in tal caso la soluzione è

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 21.

generalmente unica, salvo per una speciale classe di superficie spirali, ove si hanno invece ∞^1 soluzioni.

Perciò supponiamo già in un modo ridotto il ds^2 alla forma tipica (II) con

$$\sqrt{E} = v \quad , \quad \sqrt{G} = U$$

e vediamo se il corrispondente sistema (a)

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u} + \dfrac{B}{U} + v = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} + \dfrac{U'}{v} A + U = 0 \\ v \dfrac{\partial A}{\partial v} - U'B + U \dfrac{\partial B}{\partial u} - A = 0 \end{cases}$$

ammette altre soluzioni oltre quella del n. 4

$$A = 0 \quad , \quad B = -vU .$$

Scriviamo il sistema (19), coll'introduzione di una terza funzione incognita C, sotto la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v} = -\dfrac{B}{U} - v \quad , \quad \dfrac{\partial B}{\partial u} = \dfrac{A}{U} - \dfrac{C}{U} \\ \dfrac{\partial A}{\partial u} = \dfrac{U'}{v} B + \dfrac{C}{v} \quad , \quad \dfrac{\partial B}{\partial v} = -\dfrac{U'}{v} A - U . \end{cases}$$

Le condizioni d'integrabilità dànno subito

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial u} = \dfrac{U'}{U} C - U''B \\ \dfrac{\partial C}{\partial v} = \dfrac{C}{v} + \dfrac{UU''}{v} A , \end{cases}$$

e da queste, costruendo nuovamente la condizione d'integrabilità, otteniamo [1]

$$(20) \qquad B + vU = \frac{UU''' - U'U''}{2U''} A ;$$

indi, dalla (19_1),

$$\frac{\partial \log A}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{U'}{U} - \frac{U'''}{U''} \right) .$$

[1] Si avverta che $U'' \neq 0$.

Integrando risulta

$$A = V\sqrt{\frac{U}{U''}}$$

con V funzione di v e, dalla (20),

$$B + vU = -\frac{V}{2}\sqrt{UU''}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right).$$

Ora la (19_2) dà

$$\frac{V'}{2}\sqrt{UU''}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = \frac{U'V}{v}\sqrt{\frac{U}{U''}}\,; \tag{21}$$

ed escludendo il caso $V = 0$ che riporta alla soluzione già nota $A = 0$, $B = -vU$, sarà anche $V' \neq 0$, e la (21) si scrive

$$\frac{2V}{vV'} = \frac{U''}{U'}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = 1 - \frac{UU'''}{U'U''}.$$

Ne segue che si ha necessariamente

$$\frac{UU'''}{U'U''} = k \quad \text{(costante)}, \tag{22}$$

con $k \neq 1$, indi

$$\frac{V'}{V} = \frac{2}{(1-k)\,v}, \tag{22*}$$

e integrando

$$V = av^{\frac{2}{1-k}} \tag{23}$$

con a nuova costante, come anche dalla (22)

$$U'' = cU^k \tag{24}$$

con c costante. Rimane ancora da soddisfare la terza delle (19), per il che si osservino le formole

$$\sqrt{UU''} = \sqrt{c}\,U^{\frac{1+k}{2}}, \quad \frac{U}{U''} = \frac{1}{c}U^{1-k}, \quad \frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = \frac{1-k}{c}U^{-k}.U',$$

$$A = \frac{V}{\sqrt{c}}U^{\frac{1-k}{2}}, \quad B + vU = -\frac{V}{2}\,\frac{1-k}{\sqrt{c}}\,U^{\frac{1-k}{2}}U';$$

e sostituendo nella (19_3) e riducendo, viene

$$\frac{(1+k)(1-k)}{4}U'^2 = \frac{(1-k)\,c}{2}U^{1+k} - \frac{1+k}{1-k}.$$

Di qui si vede che, oltre al valore $k = 1$, deve escludersi anche $k = -1$, e resta la formola

$$U'^2 = \frac{2c}{1+k} U^{1+k} - \frac{4}{(1-k)^2}, \tag{25}$$

dalla quale, derivando, segue la (24).

Per questa classe di superficie spirali avviene che il sistema differenziale (19) ammette ∞^1 soluzioni, dipendenti dalla nuova costante a arbitraria nella formola (23) per V. Esse sono quindi applicabili sopra infinite altre superficie spirali senza che si corrispondano nell'applicabilità le eliche cilindro-coniche, e può dirsi che fra le superficie spirali esse tengono il posto analogo a quello che compete alle superficie di curvatnra costante fra le superficie di rotazione.

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota II del Corrisp. Q. MAJORANA [1].

Probabile natura energetica della gravitazione. — Secondo le fatte ipotesi, si può ammettere, per spiegare il fenomeno gravitazionale, che dalla materia, qualunque essa sia, si sprigioni continuamente un flusso di energia, che voglio chiamare *flusso gravitazionale*; questo, andando a colpire altra materia, e con un meccanismo di cui sarebbe ora prematuro il parlare, determinerebbe la formazione delle forze newtoniane. Esso inoltre, pur essendo dotato di un grandissimo potere di penetrazione, finirebbe per essere assorbito, sia pure parzialmente, dalla materia.

Ora, per rispettare il comune principio della conservazione dell'energia, occorre completare queste vedute con l'altra che *la materia sia in uno stato continuo di trasformazione*; la perdita di energia da sua parte, corisponderebbe a tale lenta trasformazione. Un tale ordine di idee non è del resto nuovo nella scienza: basta pensare alle moderne teorie di fisica corpuscolare, ed alla radioattività; colla differenza che p. e., il radio si trasforma in qualche migliaio di anni, mentre per tutte le altre specie di materia occorrerebbero tempi, di ordini di grandezza assai superiori.

Le nuove caratteristiche del fenomeno gravitazionale sarebbero dunque: emissione di energia da parte della materia, progressivo assorbimento di questa col propagarsi della forza gravitazionale a traverso altra materia esistente nello spazio; la forza attrattiva potrebbe essere una conseguenza di tale assorbimento. A questo punto, e sempre se le ipotesi fatte sono atten-

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1919.