ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

quasi contemporaneamente. Ciò vale secondo le idee sin qui ammesse; e siccome a taluno sembra strana questa coincidenza di età degli innumerevoli astri che ci circondano, così si è voluto far intervenire la mano di Dio, per spiegare la formazione di questi. Ora è evidente che una tale concezione esce dall'àmbito delle scienze positive, e che ad essa si deve solo ricorrere, quando il fisico non ha da applicare leggi e principii, precedentemente riconosciuti.

Le nuove teorie da me proposte, ed in particolare quella della trasformazione in calore dell'energia gravitazionale, darebbero ragione, tanto della enorme quantità di calore emessa dal sole (e quindi di un'età di questo assai superiore a quella derivante dalla teoria di Helmholtz), quanto della relativa assenza di stelle oscure. Si potrà concludere infatti, secondo tali teorie, che le agglomerazioni di materia debbono dar luogo ad una sopraelevazione di temperatura tanto maggiore, quanto più grande è la quantità di materia raccolta in un determinato spazio. Gli astri di dimensioni paragonabili a quella del sole non potrebbero essere che incandescenti, e solo quelli simili al nostro globo terrestre, sarebbero freddi. Ma tutto ciò non costituisce che un'ipotesi, sulla cui probabilità, un'accurata discussione, o, meglio, ricerche delicate di laboratorio, potranno in avvenire gettar luce.

Matematica. — *Un teorema su certe equazioni funzionali e sua interpretazione meccanica.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrisp. Marcolongo [1].

1. In alcune ricerche sulle equazioni integrali singolari, sono state da me considerate funzioni del tipo

$$f(x+\alpha t)\,.$$

Su queste funzioni si può enunciare un teorema semplicissimo che ammette una immediata interpretazione fisica. Il teorema è:

Non si possono trovare n funzioni $f_1, f_2, \dots f_n$, le quali soddisfano identicamente, per ogni x e per ogni t, alla

$$\text{(A)}\qquad F = f_1(x+\alpha_1 t) + f_2(x+\alpha_2 t) + \cdots + f_n(x+\alpha_n t) = 0$$

a meno che esse non siano polinomî di grado $n-2$ al più, se le α sono costanti tutte diverse fra loro.

Ne segue immediatamente il corollario:

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1919.

Non esistono mai funzioni f soddisfacenti alla (A) *se ad esse si impone la condizione di avere, in tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *modulo massimo finito.*

Sulle f non faremo nessuna ipotesi, salvo che esse non siano totalmente discontinue.

Nel caso però che esse ammettano derivate, sino all'ordine $n-1$ incluso, la dimostrazione è quasi immediata. Infatti, indicando con $g_1, g_2, \dots g_n$ tali derivate, si avrà ovviamente

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0$$

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2} \partial t} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} = \alpha_1^{n-1} g_1 + \alpha_2^{n-1} g_2 + \cdots + \alpha_n^{n-1} g_n = 0$$

Ora queste ultime relazioni dànno precisamente un sistema di n equazioni omogenee ad n incognite (le g). Siccome il determinante di tale sistema è precisamente il determinante di Vandermonde relativo alle $\alpha_1 \dots \alpha_n$, e questo è diverso da zero, così avremo, come solo sistema di valori che le risolva,

$$g_1 = g_2 = g_3 = \cdots = g_n = 0 .$$

E siccome queste sono le derivate $(n-1)$-esime delle f, si deduce che le f stesse (se derivabili $n-1$ volte) devono essere dei polinomî di grado $n-2$: si vede che in tal caso esse possono effettivamente soddisfare la (A). Un'altra via, in tal caso, è indicata in fondo.

2. Nel caso che invece le f non si suppongano derivabili, bisogna procedere alla dimostrazione per induzione completa. Supponiamo quindi vero il teorema per n, e dimostriamo che esso è vero anche per $n+1$.

Consideriamo perciò la funzione

$$\Phi(x, t) = f_1(x + \alpha_1 t) + \cdots + f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t)$$

e diamo ad x un aumento h, alla t un aumento k; avremo

$$\Phi(x+h, t+k) = f_1(x + \alpha_1 t + l_1) + \cdots + f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t + l_{n+1})$$

ove si ponga

$$l_r = h + \alpha_r k .$$

Ora poniamo $l_{n+1} = 0$, cioè $h = -\alpha_{n+1} k$: supponendo, ciò che non lede la generalità, $\alpha_{n+1} \neq 0$. Se α_{n+1} fosse nullo, vi sarebbe almeno un altro α diverso da zero, e muteremo gli indici.

In tale ipotesi, la l_i diventa

$$\lambda_i = (\alpha_i - \alpha_{n+1}) \, . \, k \; ; \; \lambda_{n+1} = 0 \, .$$

Avremo quind

$$\Phi (x - \alpha_{n+1} k) \; t + k) =$$
$$= f_1 (x + \alpha_1 t + \lambda_1) + \cdots + f_n (x + \alpha_n t + \lambda_n) + f_{n+1} (x + \alpha_{n+1} t) \, ;$$

e se la Φ fosse identicamente nulla, anche quest'ultima sarebbe tale; dunque, in questa ipotesi, la loro differenza sarebbe ancora identicamente nulla; avremo cioè

$$\{ f_1 (x + \alpha_1 t + \lambda_1) - f_1 (x + \alpha_1 t) \} +$$
$$+ \cdots + \{ f_n (x + \alpha_n t + \lambda_n) - f_n (x + \alpha_n t) \} +$$
$$+ \{ f_{n+1} (x + \alpha_{n+1} t) - f_{n+1} (x + \alpha_{n+1} t) \} =$$
$$= \{ f_1 (x + \alpha_1 t + \lambda_1) - f_1 (x + \alpha_1 t) \} +$$
$$+ \cdots + \{ f_n (x + \alpha_n t + \lambda_n) - f_n (x + \alpha_n t) \} = 0$$

identicamente.

Ora noi abbiamo supposto vero il teorema per n; le differenze

$$f_i (x + \alpha_i t + \lambda_i) - f_i (x + \alpha_i t)$$

sono a lor volta funzioni di $x + \alpha_i t$; dunque tutte le prime n fra le f sono tali che

$$f(y + \lambda) - f(y)$$

è un polinomio di grado $n - 2$ al più: e quindi se esse hanno un sol punto di continuità [1] dovranno essere le f polinomî di grado $(n - 1)$ al più.

Ed allora, essendo

$$_{n+1} = - f_1 - f_2 - \cdots - f_n \, ,$$

anche la f_{n+1} sarà un polinomio di grado $n - 1$, e resta dimostrato vero il teorema per $n + 1$, se esso vale per n.

Intanto, per $n = 2$, si ha l'equazione

$$f_1 (x + \alpha_1 t) + f_2 (x + \alpha_2 t) = 0 \, .$$

Ponendo in essa $x = - \alpha_1 t$, si trae, qualunqne sia t,

$$f_1 (0) + f_2 \Big((\alpha_2 - \alpha_1) \, t \Big) = 0 \, ;$$

ciò che ci dice essere f_2 (e quindi f_1) costante (polinomio di grado zero).

[1] Basta ripetere, per dimostrare ciò, quanto si fa nel caso dell'equazione

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \, .$$

Così, per il principio d'induzione completa, resta dimostrata la validità del teorema.

3. Una conseguenza importantissima di tutto quanto precede è che:

Teorema II. — *Se una funzione* $F(x, t)$ *è rappresentabile mediante la somma di n funzioni* $f_i(x + \alpha_i t)$, *essa non lo è che in un sol modo, escluso tutt'al più dei polinomî di grado* $2n - 2$.

Infatti, supponiamo dapprima che sia

$$F(x, t) = \sum_1^m f_i(x + \alpha_i t) + \sum_m^n g_i(x + \beta_i t)$$

e che sia anche

$$F(x, t) = \sum_1^m \varphi_i(x + \alpha_i t) - \sum_m^n h_i(x + \gamma_i t),$$

scrivendo nei primi due sommatori i termini che hanno le stesse α, ed ove può essere anche $m = n$; o $m = 0$, e quindi possono mancare rispettivamente il primo o il secondo sommatorio.

Se tale doppia rappresentazione esiste, facendo la differenza si avrà

$$0 = \sum_1^m \theta_i(x + \alpha_i t) + \sum_m^n g_i(x + \beta_i t) + \sum_m^n h_i(x + \gamma_i t)$$

ove $\theta = f - \varphi$.

Intanto, per il primo teorema tale identità è impossibile, a meno che le θ, y, h siano polinomî di grado $2n - m - 2$ al più; e resta dimostrato l'assunto.

Ne segue il corollario:

Una funzione $F(x, t)$ *il cui modulo massimo sia finito, se è decomponibile nella somma di n funzioni* $f(x - \alpha t)$, *anche esse aventi modulo massimo finito, lo è in modo unico e determinato.*

Infatti sarà allora

$$\text{mod}\, f \ ; \ \text{mod}\, g \ ;$$

tutti minori di A; quindi mod F limitato. Ora un'altra decomposizione differisce da questa per dei polinomî, e quindi non potremo avere

$$\text{mod}\, \varphi \ ; \ \text{mod}\, h$$

finiti. In altri termini: per il ragionamento fatto, le θ, g, h devono essere dei polinomî da un lato e quindi il loro modulo massimo è l'∞. Dall'altro, se esistesse una doppia decomposizione del tipo detto, i loro moduli debbono restare finiti; e quindi vi è contraddizione.

4. È facile poi notare che, nell'ipotesi che vi sieno derivate n-sime, la decomponibilità della F in n funzioni del tipo detto equivale ad affermare

che essa soddisfa a

$$a_0 \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\, \partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0$$

ove le radici di

$$a_0\, \xi^n + \cdots + a_n = 0$$

sieno le α. Cioè vale il

TEOREMA III. — *Se abbiamo*

$$F = f_1(x - \alpha_1 t) + f_2(x - \alpha_2 t) + \cdots + f_n(x - \alpha_n t),$$

avremo anche

$$\Theta_n(F) = a_0 \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\, \partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0$$

e reciprocamente, sempre che le radici della

$$a_0\, \xi^n + \cdots + a_n = 0$$

sieno le α.

La dimostrazione della diretta è semplice e si riduce ad una verifica. Per dimostrare l'inversa, si ponga

$$\Theta_n(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Theta_{n-1}(F) = 0\,.$$

Si ricava subito

$$\Theta_{n-1}(F) = \psi_{11}(x - \alpha_n t) \qquad (\psi \text{ arbitrario})$$

e si ponga allora

$$\Theta_{n-1}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_{n-1}} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Theta_{n-2}(F) = \psi_{11}(x - \alpha_n t).$$

Si avrà

$$\Theta_{n-2}(F) = \psi_{21}(x - \alpha_n t) + \psi_{22}(x - \alpha_{n-1} t)$$

ove ψ_{21} si ricava facilmente da ψ_{11}, e ψ_{22} è arbitrario.

Così proseguendo, arriveremo proprio a scrivere

$$F = f_1(x - \alpha_1 t) + \cdots + f_n(x - \alpha_n t)\,.$$

È facile poi risalire da tale teorema a quello enunciato in principio.

5. Passiamo infine a dare l'interpretazione fisica di tale teorema di analisi.

Se in un certo corpo alcune proprietà subiscono una variazione, e questa si trasmette progredendo con velocità α e restando immutata come intensità, tale variazione si porrà [1] sotto la forma $f(x+\alpha t)$: intendendo che in un punto x_1 al tempo t_1, la variazione abbia lo stesso valore che in x_2 al tempo t_2, se

$$(x_2 - x_1) = \alpha (t_1 - t_2).$$

Se per una qualunque causa si sovrappongono diverse di tali variazioni, supposte piccole e minori in valore assoluto di A *fisso, esse con la loro sovrapposizione non daranno mai luogo ad un movimento della stessa natura, se le velocità delle componenti sono tutte diverse fra loro* (le diremo *perturbazioni* semplici).

Infatti, da quanto si è detto, non potrà mai aversi

$$\sum_1^{n-1} f_r(x+\alpha_r t) = f_n(x+\alpha_n t)$$

se le α sono diverse fra loro, a meno che le f sieno polinomî; ed in tal caso contraddiremo all'ipotesi fatta:

$$\mathrm{Mod}\, f_r < \mathrm{A} \qquad (r = 1\,, 2\,, \ldots n).$$

In un caso speciale, ciò equivale a dire:

In tutti i problemi fisici, la cui soluzione dipende da

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

la sovrapposizione di n di queste perturbazioni

$$\zeta = z_1 + \cdots + z_n \quad ; \quad \alpha_i \frac{\partial z_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

non dà mai luogo ad una perturbazione tale che

$$\beta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Infatti, per note teorie, le soluzioni di tali equazioni sono:

$$f_i(x + \sqrt{\alpha_i}\, t) + \varphi_i(x - \sqrt{\alpha_i}\, t) \qquad (\beta = \alpha_n).$$

[1] Almeno nel caso più semplice di variazione per piani paralleli ad un dato; in altra Nota tratteremo il caso più generale ed anche l'estensione del teorema per funzioni

$$f(x+\alpha t\,, y+\beta t) \quad \text{oppure} \quad f(\mu x + \nu y + \alpha t).$$

Quindi, escluso il caso dei polinomî, non potremo trovare delle f, φ tali che

$$\sum_1^n f_i(x+\sqrt{\alpha_i}\,t)+\sum_1^n \varphi_i(x-\sqrt{\alpha_i}\,t)=0\,,$$

poichè, trattandosi di perturbazioni, i moduli delle f, φ restano finiti.

Nasce quindi il problema, che ci proponiamo di studiare: *Trovare le perturbazioni semplici, che compongono una assegnata* $F(x, t)$ *a modulo finito, dopo che siasi riconosciuta la possibilità di tale decomposizione* (vedi teor. III).

Tale teorema e tale problema possono avere una importanza capitale nella marea e nella previsione del tempo.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche del suolo elastico.* Nota I di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Del problema della deformazione del suolo elastico omogeneo ed isotropo si conoscono più metodi di risoluzione: nessuno di questi considera però specialmente il caso della deformazione simmetrica rispetto ad una normale al piano, deformazione generata da condizioni al contorno che godano della stessa simmetria. Questo caso, che mi pare di qualche interesse, viene considerato nel presente lavoro.

Mi servo perciò di alcune formole semplici del Beltrami per la determinazione di funzioni armoniche simmetriche nel semispazio limitato da un piano.

Nel § 1 enuncio il problema, mentre nel § 2 trovo la soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio. Tale soluzione contiene due funzioni armoniche arbitrarie.

In una Nota successiva, §§ 3 e 4, mostrerò come si possano determinare queste due funzioni, rispettivamente per dati spostamenti e per date tensioni al contorno, accennando anche ai casi misti, che si risolvono pure senza difficoltà.

Tutto si riduce alla risoluzione di due semplicissimi tipi di equazioni integrali, uno dei quali fu già considerato dal Beltrami [2].

1. Equazioni indefinite dell'equilibrio. — Prendiamo il piano del suolo per piano $z=0$, e il suolo occupi la regione $z>0$. Possiamo sempre supporre che siano nulle le forze di massa, cosicchè le equazioni indefinite

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

(2) E. Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, serie IV, tomo II oppure *Opere*, tomo 3.