ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2º Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Quindi, escluso il caso dei polinomî, non potremo trovare delle f, φ tali che

$$\sum_1^n f_i(x+\sqrt{\alpha_i}\,t) + \sum_1^n \varphi_i(x-\sqrt{\alpha_i}\,t) = 0\,,$$

poichè, trattandosi di perturbazioni, i moduli delle f, φ restano finiti.

Nasce quindi il problema, che ci proponiamo di studiare: *Trovare le perturbazioni semplici, che compongono una assegnata* $F(x, t)$ *a modulo finito, dopo che siasi riconosciuta la possibilità di tale decomposizione* (vedi teor. III).

Tale teorema e tale problema possono avere una importanza capitale nella marea e nella previsione del tempo.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche del suolo elastico.* Nota I di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Del problema della deformazione del suolo elastico omogeneo ed isotropo si conoscono più metodi di risoluzione: nessuno di questi considera però specialmente il caso della deformazione simmetrica rispetto ad una normale al piano, deformazione generata da condizioni al contorno che godano della stessa simmetria. Questo caso, che mi pare di qualche interesse, viene considerato nel presente lavoro.

Mi servo perciò di alcune formole semplici del Beltrami per la determinazione di funzioni armoniche simmetriche nel semispazio limitato da un piano.

Nel § 1 enuncio il problema, mentre nel § 2 trovo la soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio. Tale soluzione contiene due funzioni armoniche arbitrarie.

In una Nota successiva, §§ 3 e 4, mostrerò come si possano determinare queste due funzioni, rispettivamente per dati spostamenti e per date tensioni al contorno, accennando anche ai casi misti, che si risolvono pure senza difficoltà.

Tutto si riduce alla risoluzione di due semplicissimi tipi di equazioni integrali, uno dei quali fu già considerato dal Beltrami [2].

1. Equazioni indefinite dell'equilibrio. — Prendiamo il piano del suolo per piano $z=0$, e il suolo occupi la regione $z>0$. Possiamo sempre supporre che siano nulle le forze di massa, cosicchè le equazioni indefinite

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

[2] E. Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, serie IV, tomo II oppure *Opere*, tomo 3.

dell'equilibrio sono, indicando con u, v, w le componenti dello spostamento (1)

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta^2 u = 0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \omega^2 \Delta^2 w = 0\,, \\ &\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,. \end{aligned}$$

Se le condizioni ai limiti sono simmetriche rispetto all'asse z, la w sarà funzione soltanto di z, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e inoltre

$$(2)\qquad u = x f(r, z)\,, \quad v = y f(r, z)\,,$$

cosicchè le prime due delle (1) saranno in sostanza identiche.

Dalle (1) si ricava in modo ben noto

$$(3)\qquad \Delta^2\theta = 0\,.$$

Supponiamo di conoscere θ: si osservi allora che, per la (3),

$$\Delta^2(z\theta) = 2\frac{\partial\theta}{\partial z}\,,$$

e quindi dalla terza delle (1) si avrebbe

$$(4)\qquad w = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} z\theta + \mathrm{W}\,,$$

essendo W una funzione armonica da determinarsi.

Dimostrerò ora che la conoscenza delle due funzioni θ, W permette di determinare la soluzione generale del sistema (1); per il quale scopo basterà ora trovare la funzione $f(r, z)$ che entra nelle (2).

2. Integrale generale delle equazioni indefinite. — Si consideri la funzione cilindrica di prima specie d'ordine zero, $\mathrm{I}_0(x)$.

Allora la funzione

$$(5)\qquad \varphi(r, z) = \int_0^\infty e^{-zs}\,\mathrm{I}_0(rs)\,\psi(s)\,ds\,,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, è nel semispazio $z \geq 0$ una funzione armonica, simmetrica rispetto all'asse z ed anche la più generale, potendosi, data $\varphi(r, 0)$, cioè i valori della funzione sul piano, determinare in modo unico la funzione $\psi(r)$ (2).

(1) Vedi p. es. R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, cap. IV. Milano, Hoepli.

(2) Vedi Beltrami, loc. cit., §§ 2, 3, 4.

Le due funzioni armoniche θ e W saranno allora date rispettivamente dalle formole

(6) $$\theta = \int_0^\infty e^{-zs}\, \mathrm{I}_0(rs)\, \chi(s)\, ds\,,$$

(7) $$\mathrm{W} = \int_0^\infty e^{-zs}\, \mathrm{I}_0(rs)\, \lambda(s)\, ds\,.$$

Veniamo ora alla determinazione della funzione f. Perciò osserviamo che dalla quarta delle (1) si ricava

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

ossia, per le (2),

(8) $$2f + r\frac{\partial f}{\partial r} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z}\,.$$

Dalle (2) si ha

$$\Delta^2 u = x\Delta^2 f + 2\frac{\partial f}{\partial x} = x\Delta^2 f + 2\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,;$$

essendo poi

$$\Delta^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,$$

si ottiene, coi risultati precedenti, dalla prima delle (1), dividendo per x,

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(2f + r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\,,$$

e quindi, per la (8),

(9) $$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial z}\right).$$

Ridurrò ora il secondo membro alla forma $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2}$; avremo quindi

$$f = \mathrm{F} + z\,l(r) + m(r)\,,$$

e le funzioni $l(r)$, $m(r)$ saranno poi da determinarsi in base alla (8).

Consideriamo perciò la funzione

(6′) $$\theta_1 = \int_0^\infty e^{-zs}\, \mathrm{I}_0'(rs)\, \frac{\chi(s)}{s}\, ds\,.$$

[La funzione sotto il segno si mantiene finita anche per $s = 0$, perchè $\mathrm{I}_0'(x)$

si annulla di primo ordine per $x=0$]. Per la θ_1 vale la relazione, facile a verificarsi,

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}=\frac{\partial\theta}{\partial r}. \tag{10}$$

Si osservi inoltre che, per la (4),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}=-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}+z\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial z}\right]+\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial r}.$$

Ma ora, per la (10),

$$z\frac{\partial^2\theta}{\partial r\,\partial z}=z\frac{\partial^3\theta_1}{\partial z^3}=z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)-2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}; \tag{10'}$$

per di più, posto

$$W_1=-\int_0^\infty e^{-zs}\,I_0'(rs)\,\lambda(s)\,ds, \tag{7'}$$

si ha

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r\,\partial z}=\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2}. \tag{10''}$$

Dalla (9), tenendo presente l'osservazione fatta e le formole (10), (10′), (10″), otteniamo

$$f(r,z)=-\frac{1}{r}\left(\alpha\theta_1+\beta z\frac{\partial\theta_1}{\partial z}-W_1\right)+z\,l(r)+m(r), \tag{11}$$

avendosi posto

$$\alpha=\frac{\Omega^2+\omega^2}{2\omega^2},\quad \beta=\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}. \tag{12}$$

Rimane ora da verificare la (8). Osserviamo perciò che dalla (11) si ottiene

$$2f+r\frac{\partial f}{\partial r}=-\alpha\left(\frac{1}{r}\theta_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right)-\beta z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\theta_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r}W_1+\frac{\partial W_1}{\partial r}+z(2l+rl')+2m+rm'.$$

Dimostriamo ora che

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\theta_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial r}&=-\theta,\\ \frac{1}{r}W_1+\frac{\partial W_1}{\partial r}&=-\frac{\partial W}{\partial z}.\end{aligned} \tag{13}$$

Infatti, dalla (6'),

$$\frac{1}{r}\,\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \int_0^\infty e^{-zs}\left[\frac{1}{rs}\,\mathrm{I}_0'(rs) + \mathrm{I}_0''(rs)\right]\chi(s)\,ds\,. \tag{13'}$$

Ora la $\mathrm{I}_0(x)$ soddisfa alla equazione differenziale (1)

$$\frac{d}{dx}\Big(x\,\mathrm{I}_0'(x)\Big) = -\,x\,\mathrm{I}_0(x)\,;$$

quindi nel nostro caso

$$\frac{d}{dr}\,\Big(r\mathrm{I}_0'(rs)\Big) = -\,rs\,\mathrm{I}_0(rs)\,,$$

ossia

$$\mathrm{I}_0'(rs) + rs\,\mathrm{I}_0''(rs) = -\,rs\,\mathrm{I}_0(rs)\,.$$

Dalla (13'), tenendo conto di quest'ultima relazione, ne scende la prima delle (13): analogamente per la seconda.

Ne viene

$$2f + r\,\frac{\partial f}{\partial r} = \alpha\theta + \beta z\,\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + z(2l + rl') + 2m + rm'\,;$$

ma dalla (4)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\,\beta\theta - \beta z\,\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\,,$$

quindi, essendo

$$\alpha - \beta = 1\,,$$

ne risulta

$$2f + r\,\frac{\partial f}{\partial r} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z} + z(2l + rl') + 2m + rm'\,.$$

Confrontando colla (18), si ottiene, per determinare $l\,,\,m$, l'equazione

$$z(2l + rl') + 2m + rm' = 0\,.$$

Questa dovendo essere verificata qualunque sia z, si scinde nelle due

$$2l + rl' = 0\quad,\quad 2m + rm' = 0\,.$$

Ricaviamo di qui

$$l = \frac{\mathrm{C}_1}{r^2}\quad,\quad m = \frac{\mathrm{C}_2}{r^2}\,,$$

(1) Beltrami, loc. cit., § 2.

essendo C_1, C_2 costanti. Ma queste costanti devono essere nulle. Infatti esse portano alla deformazione il contributo

$$u = \frac{xz\,C_1}{r^2} + \frac{x\,C_2}{r^2}\ ,\quad v = \frac{yz\,C_2}{r^2} + \frac{y\,C_2}{r^2}\,.$$

Il primo termine, in entrambe le formole, tenendo x e y costanti, diventerebbe infinito per $z = \infty$: mentre il secondo diventa infinito per $r = 0$. Siccome queste circostanze non debbono presentarsi, così è necessario che $C_1 = C_2 = 0$.

Concludendo: Definite le due funzioni θ, W mediante le (6), (7) e le corrispondenti θ_1, W_1 mediante le (6′), (7′), la soluzione generale delle equazioni indefinite per l'equilibrio è data dalle relazioni

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} u = xf(r\,,z)\,, \\ v = yf(r\,,z)\,, \\ w = -\beta z\theta + W\,, \end{cases}$$

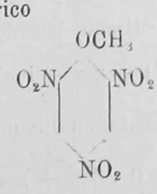
essendo

$$\text{(II)}\qquad f = -\frac{1}{r}\left(\alpha\theta_1 + \beta z\frac{\partial\theta_1}{\partial z} - W_1\right).$$

Si tratterà ora di vedere come le due funzioni θ, W possano determinarsi mediante i dati al contorno, ossia come si determinano le due funzioni $\chi(s)$, $\lambda(s)$ mediante le quali si costruiscono le θ, W e le corrispondenti θ_1, W_1.

Chimica. — *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici. IX: Sul comportamento del trinitroanisolo* (¹). Nota di M. Giua e F. Cherchi, presentata dal Socio G. Paternò (²).

Il trinitroanisolo simmetrico



oltre che per le proprietà peculiari di etere dell'acido picrico, ha acquistato recentemente importanza per l'impiego nella tecnica degli esplosivi. Data la sua costituzione chimica si può prevedere che il suo comportamento, dal

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.
(²) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.