ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 novembre 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *La distribuzione geografica attuale delle formiche.* Memoria del Socio C. Emery.

Fisiologia. — *Rapporto funzionale tra cervelletto e labirinto non acustico.* Memoria del Socio A. Stefani

I due precedenti lavori saranno pubblicati nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Un teorema sui fasci reali di curve algebriche.* Nota di Luigi Brusotti, presentata dal Corrisp. L. Berzolari.

1. Un fascio

$$f + \lambda g = 0$$

di curve piane algebriche, di ordine n, si dirà *algebricamente generico* quando l'equazione di grado $3(n-1)^2$ in λ, che si ottiene annullando il discriminante della curva corrente, abbia radici tutte distinte. Il fascio ha n^2 puntibase semplici e distinti, e presenta $3(n-1)^2$ punti doppî (ciascuno a tangenti distinte) appartenenti ad altrettante curve distinte del fascio.

Un fascio reale di curve piane algebriche si dirà *topologicamente generico*, quando i suoi punti-base *reali* siano tutti semplici e distinti, e le sue curve dotate di punti multipli *reali* sian tutte distinte, essendo ciascuna dotata di un sol punto doppio reale a tangenti distinte (reali od immaginario-conjugate). Ciò equivale ad affermare che le parti reali delle curve reali del dato fascio costituiscono un *fascio di curve grafiche generico*, in un senso già altrove precisato [1].

Un fascio reale algebricamente generico lo è pure topologicamente; la reciproca non sussiste, perchè la presenza di singolarità immaginario-conjugate può escludere la genericità algebrica pur rispettando quella topologica.

2. Ciò posto si vuol qui dimostrare il seguente teorema:

Se in un fascio φ (reale) topologicamente generico di curve di genere $p > 0$ esiste una curva (reale) la quale possegga un circuito passante per uno solo dei punti-base (reali), le curve di φ dotate di analoga proprietà si distribuiscono in μ distinti continui, essendo

$$0 < \mu \leq p;$$

e ciascuna di esse è fornita di almeno $\mu + 1$ circuiti. Il punto-base in questione è uno stesso punto B *per tutti i continui* [2].

Invero le parti reali delle curve reali di φ costituiscono un fascio di curve grafiche del tipo studiato ai numeri 66 e 67 del citato lavoro, onde intanto segue l'unicità di B.

Inoltre, se si esclude il caso ovvio in cui ogni curva reale di φ sia del tipo richiesto, il piano projettivo si può immaginare diviso in un numero pari ($= 2\mu$) di regioni, ciascuna delle quali è opposta al vertice a se stessa in B. Ed è lecito ordinare tali regioni ciclicamente attorno a B in tal maniera che ciascuna di quelle aventi posto dispari si possa immaginare generata (coll'esclusione di eventuali regioni semplicemente connesse) da un circuito di una curva di φ, il quale ruoti (deformandosi) intorno a B, senza passare per ulteriori punti-base, mentre la curva stessa descrive in φ un continuo.

Sono così introdotti *i μ continui in cui si distribuiscono le curve di φ aventi un circuito che passi per un sol punto-base.*

Si aggiunga che nel *sistema connesso* [3] di cui fa parte B gli ulteriori punti-base si ripartiscono in μ gruppi situati rispettivamente entro le μ regioni di posto pari ed in ciascun gruppo sono in numero pari non nullo.

[1] Brusotti, *Sui fasci di curve grafiche* (in corso di pubblicazione).

[2] Per $p = 0$, se una curva di φ ha la detta proprietà, lo stesso avviene per ogni altra curva (reale) di φ. Si può quindi porre $\mu = 1$.

[3] Mem. cit., num. 61. Due punti-base diconsi fra loro *collegati* se sono estremi di un segmento appartenente ad un circuito di una curva di φ e non passante per ulteriori punti-base. Ora dato un punto-base si introducano tutti quelli collegati con esso, poi gli ulteriori collegati con uno dei precedenti; e così via fin che sia possibile. Così si costruisce un *sistema connesso di punti base.*

Ma la connessione fra due punti di diverso gruppo non può avvenire che per mezzo di B.

Segue che per una curva appartenente ad uno dei μ continui sopra ricordati, trovandosi il punto-base B isolato sul circuito dispari, due punti-base di due diversi gruppi sono situati sopra due diversi circuiti pari. *Onde il numero totale* k *dei circuiti di una curva appartenente ad uno dei detti* μ *continui è* $\geq \mu + 1$.

Ma poichè per il teorema di Harnack [1], è

$$k \leq p + 1 ,$$

è pure, a più forte ragione, $\mu + 1 \leq p + 1$, ossia

$$\mu \leq p .$$

Il teorema è così interamente dimostrato.

3. Esso è applicabile ai fasci reali di cubiche piane ($p = 1$).

Precisamente: *Se in un fascio reale di cubiche piane, topologicamente generico, esiste una cubica il cui serpentino passa per un sol punto-base, di tali cubiche esiste nel fascio uno ed un sol continuo.*

O, ciò che è lo stesso: *Se in un fascio reale di cubiche piane, topologicamente generico e dotato di* $b > 1$ *punti-base reali, esiste una cubica il cui ovale passa per* $b - 1$ *di essi, di tali cubiche nel fascio esiste uno ed un sol continuo.*

In questa forma, e soltanto per il caso $b = 9$, il teorema è dimostrato dal Mohrmann, con procedimento non breve e forse non suscettibile di estensione [2].

(1) Harnack, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Mathematische Annalen, Bd X; pp. 189-198). Cfr. Enriques, *Teoria geometrica delle equazioni*, (Zanichelli, Bologna), vol. II, pag. 264; e G. Lery, *Sur la fonction de Green pour un contour algébrique* [Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 32 (1915) pagine 49-135].

(2) Mohrmann, *Ueber das Büschel von ebenen Kurven 3. Ordnung mit neun reellen Grundpunkten* (Mathematische Annalen, Bd LXXIV, pp. 319-340). Vedasi specialmente § 5.