ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota I di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. In una Nota (¹) di carattere preventivo sulle deformazioni delle superficie che lasciano invariati gli elementi lineari e le prime $\nu-1$ curvature delle sue curve (*deformazioni di specie* ν), ho mostrato che una superficie è individuata, rispetto al gruppo di tali deformazioni, dalla conoscenza delle ν forme differenziali binarie

$$F_{2\mu}=\sum_{0}^{\mu-1}{}_{s}\binom{2\mu}{s}[\mu\,,0\,,\mu-s\,,s]\,du_1^{2\mu-s}\,du_2^{s}+\binom{2\mu}{\mu}[\mu\,,0\,,0\,,\mu]\,du_1^{\mu}\,du_2^{\mu}+$$

$$+\sum_{0}^{\mu-1}{}_{s}\binom{2\mu}{s}[s\,,\mu-s\,,0\,,\mu]\,du_1^{s}\,du_2^{\mu-s}\qquad(\mu=1\,,\dots,\nu)$$

ove

$$[h\,,k\,,l\,,m]=\sum_{1}^{n}{}_{i}\frac{\partial^{h+k}x_i}{\partial u_1^h\,\partial u_2^k}\frac{\partial^{l+m}x_i}{\partial u_1^l\,\partial u_2^m}\ (^2)$$

essendo $x_i(u_1\,,u_2)$ $(i=1\,,\dots,n)$ le coordinate di un punto generico della superficie di S_n che si vuol deformare: cioè se due superficie, i cui punti siano riferiti agli *stessi* parametri $u_1\,,u_2$, si corrispondono in una deformazione di specie ν, i simboli $[h\,,k\,,l\,,m]$ che figurano in $F_2\,,F_4\,,\dots,F_{2\nu}$ hanno gli stessi valori in punti corrispondenti, e viceversa.

Le forme precedenti sono le più semplici per individuare una superficie rispetto ad un tale gruppo *quando sia assegnato il sistema coordinato* $u_1\,,u_2$ *le cui linee* ($u_1=$ cost., $u_2=$ cost.) *si corrispondono sulle due superficie applicabili di specie* ν, in quanto ciascuna introduce, come coefficienti, simboli [ ] non contenuti nelle precedenti e caratteristici di una deformazione la cui specie supera di 1 la precedente.

Ma esse *non* sono atte a costruire una teoria invariantiva poichè un cambiamento di variabili $(u_1\,,u_2)$ in $(u_1'\,,u_2')$ ne muta completamente la

(¹) *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni, delle superficie, di specie superiore* (questi Rendiconti, vol. XXV, 1916_1). Allo stesso argomento si collegano le altre mie Note: *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale* (ibid., vol. XXIV, 1915_1); *Affinità e superficie applicabili* (vol. XXVI, 1917_1).

(²) Ricordo che E. E. Levi ha chiamato *ordine* di un simbolo $[h\,,k\,.\,l\,,m]$ il maggiore dei due numeri $h+k\,,l+m$. Se $h+k=l+m$ il simbolo si dice *principale*; altrimenti, *dedotto*. Per le citazioni e maggiori particolari cfr. *Basi analitiche* ecc.

struttura (introducendo derivate di u_1, u_2 rispetto ad u'_1, u'_2 fino all'ordine ν incluso).

Il problema della ricerca degli invarianti e dei covarianti assoluti di una superficie rispetto alle deformazioni di specie ν, cui sono destinate questa Nota ed una successiva (1), si spezza nei seguenti:

1°. Costruzione di espressioni invarianti in una deformazione di specie ν, *quando si lasci immutato il sistema di linee* u_1, u_2.

2°. Formazione, per mezzo delle precedenti, di espressioni covarianti o invarianti (*relativi*) rispetto alle trasformazioni di linee coordinate.

3°. Costruzione degli invarianti e covarianti *assoluti*.

Il primo problema è di carattere *differenziale*; gli altri due sono di carattere *algebrico*; per il primo bastano le forme $F_{2\mu}$, per gli altri ci serviremo di un nuovo sistema di *forme simboliche* L_μ $(\mu \leq \nu)$ i cui coefficienti hanno la proprietà di trasformarsi per un cambiamento di variabili come i coefficienti di una forma algebrica (e i loro quadrati hanno un notevole significato geometrico).

Il risultato fondamentale di questa ricerca è l'estensione del « theorema egregium » di Gauss sull'invarianza della curvatura di una superficie nelle applicabilità; *proveremo infatti l'esistenza (dandone l'effettiva costruzione) di un sistema d'invarianti e di covarianti per deformazioni di specie* $\nu - 1$ *contenenti i coefficienti della forma che (insieme con le precedenti) serve ad individuare le deformazioni di specie* ν.

2. Partiamo da alcune osservazioni elementari relative al problema 1°. In una deformazione di specie ν sono invarianti tutti i simboli principali d'ordine $\leq \nu$ ed ogni invariante è funzione di essi.

Però *la differenza*

$$[h, k, l, m] - [h-1, k+1, l+1, m-1]$$
$$h+k = l+m = \nu$$

per h ed $m \geq 1$, ovvero

$$[h, k, l, m] - [h+1, k-1, l-1, m+1]$$

per k ed $l \geq 1$, pur essendo costruita con due simboli principali di ordine ν, risulta (2) esprimibile per soli simboli principali d'ordine $\leq \nu - 1$, quindi *è invariante per deformazioni di specie* $\nu - 1$.

Altrettanto accade, com'è evidente, per la differenza

$$L_{\nu-h,h}\, L_{\nu-l,l} - L_{\nu-h-1,h+1}\, L_{\nu-l+1,l-1}$$

(1) Anche queste Note hanno carattere preventivo.

(2) *Basi analitiche* ecc., pag. 632.

ove

$$\mathrm{L}_{\nu-h,h} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^{\nu-h}\,\partial u_2^h} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_2} \end{Vmatrix} : \sqrt{\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^{\nu-1} x_i}{\partial u_1^{\nu-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_2} \end{Vmatrix}^2}$$

ove la matrice a denominatore è formata con tutte e sole le derivate linearmente indipendenti di ordine $\leq \nu - 1$, e quella a numeratore contiene in più, nella prima linea, le derivate $\dfrac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^{\nu-h}\,\partial u_2^h}$.

3. Per costruire gli invarianti e i covarianti di una deformazione (per cambiamenti di variabili) conviene partire dalle forme simboliche, di cui qui scrivo solo quella d'ordine ν:

$$\mathrm{L}_\nu = \sum_0^\nu {}_h \binom{\nu}{h} \mathrm{L}_{\nu-h,h}\, du_1^{\nu-h}\, du_2^h\,.$$

La legittimità di adoperare le L_ν come *forme* simboliche risiede in ciò che *per un cambiamento di variabili i coefficienti simbolici* $\mathrm{L}_{\nu-h,h}$ *si mutano proprio come i coefficienti di una forma binaria di grado* ν.

4. Si ha una riprova intuitiva di questo comportamento nel significato geometrico di L_ν^2 (*forma effettiva di grado* 2ν).

Chiamiamo, come è d'uso, spazio $(\nu-1)$-osculatore alla superficie in x, o brevemente $\mathrm{S}(\nu-1)$-osculatore, quello determinato dal punto x e dai suoi punti derivati (che cioè hanno per coordinate le derivate di x_i) fino all'ordine $\nu - 1$. Allora:

Il quadrato della distanza di un punto della superficie, preso nell'intorno d'ordine ν *di un punto* x *dallo* $\mathrm{S}(\nu-1)$ *osculatore in* x, *vale appunto* L_ν^2.

È poi evidente che *alle forme* F *si possono sostituire le forme* L_1^2, $\mathrm{L}_2^2, \dots, \mathrm{L}_\nu^2$, *cioè queste individuano ancora la superficie rispetto alle deformazioni di specie* ν; e dall'osservazione precedente segue:

In una deformazione di specie ν *la varietà degli* $\mathrm{S}(\nu-1)$*-osculatori riceve una deformazione di prima specie* (*ordinaria applicabilità*); *e più in generale la varietà degli* $\mathrm{S}(\nu-h)$*-osculatori riceve una deformazione di specie* h.

È questa la ragione dei legami che passano fra le deformazioni per applicabilità di una varietà e le deformazioni di specie superiore delle superficie [1].

[1] Vedansi a questo proposito le mie Note: *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie* (questi Rendic., vol. XXIII, 1914,) e *Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à n* (>3) *dimensions* (Comptes Rendus de l'Acad. des sciences, t. 164, 1917,).

5. Poichè le forme simboliche L_ν possono considerarsi, nei riguardi delle trasformazioni di variabili sulla superficie, come forme algebriche nei differenziali du_1, du_2, *possiamo*, con le regole note per queste, *costruire gli invarianti e i covarianti in una deformazione di specie* ν.

Basta eseguire le *spinte* sulle forme L_μ ($\mu = 1, \ldots, \nu$) e sui covarianti che così se ne deducono, fino a trovare un sistema completo d'invarianti. Bisogna però tener presente che, *operando su* L_μ *di indici differenti, si ottengono covarianti o invarianti simbolici*, poichè vi figurano prodotti di matrici fra loro diverse: *si otterranno invarianti o covarianti effettivi moltiplicando due di quelli simbolici contenenti matrici delle stesse dimensioni* (in particolare facendone il quadrato).

6. Il *teorema fondamentale* corrispondente a quello di Gauss è il seguente:

Gli invarianti e i covarianti effettivi che si ottengono a partire dalla sola forma L_ν *(che, con le precedenti, serve a caratterizzare le deformazioni di specie* ν*) restano tali nelle deformazioni di specie* $\nu - 1$.

Basterà provarlo per le spinte eseguite direttamente su L_ν; perchè gli altri covarianti o invarianti si formano con esse e con le spinte eseguite sul sistema di L_ν e delle spinte già trovate. Ma poichè le spinte prima considerate risultano già forme effettive e non simboliche, non si potrà operare su di esse e sulla L_ν senza ottenere invarianti o covarianti simbolici; mentre il teorema vale per i covarianti effettivi (non ottenuti come prodotti di quelli simbolici). È poi naturalmente da escludere la spinta nulla eseguita su L_ν, cioè L_ν^2, che dà appunto la ν-esima forma fondamentale.

La r-esima spinta eseguita su L_ν è definita dall'operazione

$$\omega^r(L_\nu, L_\nu) = \frac{[(\nu - r)!]^2}{[\nu!]^2} \sum_0^r {}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} \frac{\partial^r L_\nu}{\partial du_1^{r-\rho}\, \partial du_2^\rho} \frac{\partial^r L_\nu}{\partial du_1^\rho\, \partial du_2^{r-\rho}}$$

(per avere un risultato non nullo, dev'essere r pari e $\leq \nu$); quindi

$$\omega^r(L_\nu, L_\nu) = \sum_0^{\nu-r} {}_{h,k} \binom{\nu - r}{h} \binom{\nu - r}{k} \sum_0^r {}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} \times$$
$$\times L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-h-r+\rho,\, h+r-\rho}\, du_1^{2(\nu-r)-(h+k)}\, du_2^{h+k}.$$

Dimostriamo che i coefficienti di questa forma (che pure contengono derivate d'ordine ν) sono invarianti (fissate le linee coordinate sulla superficie) per deformazioni di specie $\nu - 1$ (invece che ν).

Il coefficiente di $du_1^{2(\nu-r)-t}\, du_2^t$ in questa forma, per $t \leq \nu - r$, è

$$\sum_0^t {}_k \binom{\nu - r}{k} \binom{\nu - r}{t - k} \sum_0^r {}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-r-t+k+\rho,\, r+t-k-\rho}$$

(mentre, se fosse $t \geq \nu - r$, basterebbe scambiare u_1 con u_2; quindi scambiare l'ordine degli indici in ogni $L_{\nu-h,h}$). Servendoci dell'identità numerica

$$\binom{r}{\varrho} = \binom{r-1}{\varrho} + \binom{r-1}{\varrho-1}$$

osservando che per $\varrho = r$ manca il primo coefficiente binomiale a destra dell'uguaglianza e così il secondo per $\varrho = 0$, e cambiando l'indice nella seconda sommatoria che si presenta, quel coefficiente si scrive

$$\sum_{0}^{t}{}_{k} \binom{\nu-r}{k} \binom{\nu-r}{t-k} \sum_{0}^{r-1}{}_{\rho} (-1)^{\rho} \binom{r-1}{\rho} \{ L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-r-t+k+\rho,\, r+t-k-\rho} -$$
$$- L_{\nu-k-\rho-1,\, k+\rho+1}\, L_{\nu-r-t+k+\rho+1,\, r+t-k-\rho-1} \} .$$

Ma le espressioni formate con le $L_{\nu-h,h}$ che compariscono in ciascuna parentesi sono proprio del tipo esaminato in fine al n. 2: è così provato quanto si voleva [1].

Notiamo esplicitamente il corollario:

Soltanto nelle deformazioni di specie dispari ($= \nu - 1$) *esiste un invariante formato con sole spinte eseguite sulla forma* L_ν (e non con spinte delle spinte), ed è

$$\tfrac{1}{2}\, \omega^{\nu}(L_\nu, L_\nu) = L_{\nu 0}\, L_{0 \nu} -$$
$$- \binom{\nu}{1} L_{\nu-1,1}\, L_{1,\nu-1} + \cdots + (-1)^{\nu/2}\, \tfrac{1}{2} \binom{\nu}{\nu/2} L^2_{\nu/2,\nu/2} .$$

7. I covarianti e gli invarianti finora ottenuti sono *relativi*, in quanto per una trasformazione di variabili vengono moltiplicati per una potenza del determinante della sostituzione; poichè anche $\sqrt{EG - F^2}$ viene moltiplicato per detto determinante, *per avere gli invarianti e i covarianti assoluti di una deformazione basta dividere quelli* (*relativi*) *trovati per una conveniente potenza di* $\sqrt{EG - F^2}$.

Nella Nota successiva darò alcune conseguenze del teorema fondamentale.

(1) Sono evidentemente nulli i termini dello sviluppo precedente, per quali $2(k+\varrho) = r + t - 1$.