ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota II di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [1].

2. Per U costante non si hanno casi particolari in cui le rotazioni non siano permanenti. — Per vedere se, per U costante, esistano eventualmente dei casi particolari in cui S e T non siano costanti, si può considerare la (VI'_b) scritta sotto la forma

$$(\mathrm{VI}''_b) \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega})^2 \,.\, \mathrm{T}' = (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g})\, \mathrm{S}' \,.$$

Il caso finora escluso $\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega} = 0$ annulla identicamente la (VI''_b); però la (VI'_a) porge, in tale ipotesi,

$$(11) \qquad \mathrm{S}' = (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega} = 0$$

e quindi $\mathrm{S} = \mathrm{cost}$, $\mathrm{T} = \mathrm{cost}$.

Supposto ora $\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega} \neq 0$, i casi che si possono presentare sono

$$(12) \quad \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0 \;,\; (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) = 0 \;,\; (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) \neq 0 \,.$$

Se è $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$ dalla (VI''_b), risulta $\mathrm{T}' = 0$ e quindi $\mathrm{T} = \mathrm{cost}$, $\mathrm{S} = \mathrm{cost}$.

Il caso $(\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \times (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) = 0$ è incompatibile con la ipotesi $\mathrm{U} = \mathrm{costante}$. Infatti, supposto $\mathrm{U}' = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, si ha

$$(13) \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) = -\,\alpha\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \,.\, \mathbf{g} = 0 \,;$$

e da qui, poichè è per ipotesi $\mathbf{g} \neq 0$, risulta evidente l'incompatibilità della condizione $\mathrm{U} = \mathrm{costante}$ con la seconda delle (12).

Finalmente la terza ipotesi rientra nel caso del giroscopio asimmetrico generale per il quale si è già visto che S e T devono essere costanti.

Quindi si può dire che « *con l'ipotesi* $\mathrm{U} = \mathrm{costante}$, *solo le rotazioni permanenti sono compatibili* ».

Esaminando più particolarmente il caso $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, il caso cioè in cui la retta che passa per il punto fisso e per il baricentro del giroscopio si mantiene verticale, si vede subito che per la (I) si ha $(\alpha\boldsymbol{\Omega})' = 0$ e quindi $\alpha\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{cost}$, cioè « *in questo caso il vettore del momento rispetto ad O dell'impulso si mantiene costante non solo in grandezza, ma anche in direzione e verso* ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° giugno 1919.

Inoltre, poichè i moti possibili sono rotazioni permanenti, sarà $\Omega' = 0$ e quindi anche $\alpha\Omega' = 0$ e perciò dall'equazione

$$(\alpha\Omega)' = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega = 0$$

si deduce

$$\Omega \wedge \alpha\Omega = 0 \tag{14}$$

cioè « *il giroscopio ruota permanentemente attorno ad un asse parallelo al vettore del momento rispetto ad O dell'impulso* ».

In particolare, se il giroscopio è *simmetrico* rispetto ad un asse Os, si ha

$$\alpha\Omega = A\Omega + aH(s, s)\Omega = A\Omega + a.\Omega \times s.s$$

dove A e a sono numeri reali, e allora la (14) si scrive

$$a.\Omega \times s.\Omega \wedge s = 0 \tag{15}$$

e questa è soddisfatta quando sia $\Omega \wedge s = 0$ oppure $\Omega \times s = 0$, essendo $a \neq 0$. Quindi « *in questo caso particolare, i moti del giroscopio saranno* « *delle rotazioni permanenti attorno ad un asse fisso nello spazio, parallelo* « *o perpendicolare all'asse di simmetria del giroscopio stesso* ».

Se, infine, il giroscopio è simmetrico rispetto al punto fisso, allora, riducendosi l'omografia α d'inerzia ad un numero, la (14) risulta identicamente soddisfatta, il che significa che « *qualunque retta passante per il* « *punto fisso può essere un asse permanente di rotazione, che resta però* « *sempre lo stesso durante il moto* ».

3. Studio del caso in cui l'invariante principale S è costante. Indicando con S_0 il valore costante di S, si ha

$$\alpha\Omega \times g = S_0;$$

cioè « *la proiezione del vettore $\alpha\Omega$ dell'impulso sulla retta che congiunge* « *il punto fisso col baricentro del giroscopio si mantiene costante durante* « *il moto* ». In questo caso le equazioni (III) e la (VI_a) si scrivono

$$\text{(A)} \quad \Omega \times \alpha\Omega = 2T \; ; \; (\alpha\Omega)^2 = 2U \; ; \; g \times \alpha\Omega = S_0 \; ; \; g \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0$$

e le due ultime rappresentano rispettivamente un piano passante per il punto fisso O e il cono degli assi permanenti di rotazione (*cono di Staude*).

Secondochè queste due equazioni sono o no tra loro indipendenti, cioè a dire secondochè il detto piano taglia il cono o ne è un elemento costitutivo, si hanno evidentemente due casi diversi.

Cominciando dall'esame del primo caso, in cui il piano per O taglia il cono di Staude, osserviamo che la (VI_b), per $S' = 0$ e tenendo conto della (VII), dà la relazione

(1) $$dT/dU = (2g^2 T - g \times \boldsymbol{\Omega} . S_0) / (2g^2 U - S_0^2)$$

la quale, per le (A), può anche scriversi

(1′) $$dT/dU = [\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} . g^2 - g \times \boldsymbol{\Omega} . g \times \alpha\boldsymbol{\Omega}] / [(\alpha\boldsymbol{\Omega})^2 . g^2 - (g \times \alpha\boldsymbol{\Omega})^2].$$

D'altra parte, l'espressione di dT/dU può ricavarsi direttamente dalle (A): infatti, derivando le (A) rispetto ad U e tenendo presente che l'omografia α è una dilatazione, si ricavano le equazioni

(B) $$\alpha\boldsymbol{\Omega} \times d\boldsymbol{\Omega}/dU = dT/dU \ ; \ \alpha^2\boldsymbol{\Omega} \times d\boldsymbol{\Omega}/dU = 1 \ ; \ \alpha g \times d\boldsymbol{\Omega}/dU = 0 \ ;$$
$$K\gamma g \times d\boldsymbol{\Omega}/dU = 0 \,,$$

dove

(2) $$K\gamma = -(\alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge + \alpha . \boldsymbol{\Omega} \wedge$$

è la coniugata dell'omografia

(3) $$\gamma = (\alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge - \boldsymbol{\Omega} \wedge . \alpha \,.$$

Ora dalla 2ª, 3ª e 4ª delle (B) si ottiene al modo solito la relazione

$$\alpha^2\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g . d\boldsymbol{\Omega}/dU = \alpha g \wedge K\gamma g$$

e, in modo analogo, dalla 1ª, 3ª e 4ª delle (B) si ha

$$\alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g . d\boldsymbol{\Omega}/dU = (dT/dU) . \alpha g \wedge K\gamma g \,.$$

Dividendo a membro a membro queste due relazioni e risolvendo rispetto a dT/dU, si ottiene la nuova espressione cercata, cioè

(4) $$dT/dU = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g \,, \alpha^2\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g \,.$$

Per dimostrare che le formole (1′) e (4), considerate come funzioni di U, sono fra loro identiche, basta provare che sussiste l'identità

(5) $$\alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g . [(\alpha\boldsymbol{\Omega})^2 g^2 - (g \times \alpha\boldsymbol{\Omega})^2] -$$
$$- \alpha^2\boldsymbol{\Omega} \times \alpha g \wedge K\gamma g . [\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} . g^2 - g \times \alpha\boldsymbol{\Omega} . g \times \boldsymbol{\Omega}] = 0 \,.$$

Il primo membro della (5) può scriversi, per formole note,

$$\alpha\boldsymbol{\Omega} \times (\alpha g \wedge K\gamma g) . [(g \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge g] \times \alpha\boldsymbol{\Omega} -$$
$$- \alpha^2\boldsymbol{\Omega} \times (\alpha g \wedge K\gamma g) . [(g \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge g] \times \boldsymbol{\Omega} \,;$$

e quindi, ponendo

$$\alpha g \wedge K\gamma g = \mathbf{u} \quad , \quad (g \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}) \wedge g = \mathbf{v} \,,$$

si ha successivamente

$$(5') \qquad \alpha\Omega \times \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \alpha\Omega - \alpha^2\Omega \times \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \Omega =$$
$$= \Omega \times \alpha\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \alpha\Omega - \alpha\Omega \times \alpha\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} \times \Omega = (\alpha\Omega \wedge \Omega) \times (\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u}) \,.$$

Ora, si osserva che il vettore $(\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u})$ risulta parallelo al vettore g; infatti si ha identicamente

$$(\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u}) \wedge \mathrm{g} = \mathbf{v} \times \mathrm{g} \,.\, \alpha\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} \times \mathrm{g} \,.\, \mathbf{v} =$$
$$= [(\mathrm{g} \wedge \alpha\Omega) \wedge \mathrm{g}] \times \mathrm{g} \,.\, \alpha\mathbf{u} - (\alpha\mathrm{g} \wedge \mathrm{K}\gamma\mathrm{g}) \times \alpha\mathrm{g} \,.\, \mathbf{v} = 0 \,.$$

Dopo ciò, indicando con m un numero reale, la (5′) può scriversi

$$(5'') \qquad m \,.\, \alpha\Omega \wedge \Omega \times \mathrm{g} = 0$$

per la 4ª delle (A); dunque la (5) è identicamente soddisfatta, e quindi la (1′) e la (4) sono tra loro identiche, c. d. d.

Dopo ciò, è chiaro che la (VI_b) del sistema di Schiff, dalla quale si è ricavata la (1′), non è più indipendente dalle altre equazioni del sistema perchè è conseguenza della (VI_a) che coincide con la 4ª delle (A), e quindi si conclude che « *perchè, nel caso in cui è costante l'invariante S, possa sussistere l'equivalenza fra le equazioni di Euler-Poisson e quelle di Schiff, è necessario trovare una nuova equazione, indipendente dalle altre, che sostituisca la* (VI_b) ».

Per la ricerca di questa nuova equazione si osserva che dalle (V) e (VI) si possono dedurre come conseguenza [v. loc. cit. (1)] le equazioni

$$(6) \qquad \mathrm{g} \times \mathbf{a} = 0 \quad ; \quad \alpha\Omega \times \mathbf{a} = 0$$

dove il vettore $\mathbf{a}$ è definito dalla relazione

$$(7) \qquad \mathbf{a} = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega + \mathrm{g} \wedge \mathbf{k}_1 \,.$$

Associando alle (6) l'equazione

$$(8) \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{a} = 0 \,,$$

si ha un sistema che conduce alla relazione

$$(9) \qquad \mathrm{g} \times \alpha\Omega \wedge \mathbf{k}_1 \,.\, \mathbf{a} = 0$$

e, poichè il primo fattore della (9) equivale ad U', che è per ipotesi diverso da zero, si conclude che deve essere necessariamente $\mathbf{a} = 0$, deve cioè sussistere necessariamente l'equazione (I) di Euler. Osservando inoltre che, quando U è funzione del tempo, sussiste l'equivalenza fra le equazioni di Schiff e quelle di Poisson [v. loc. cit. (1)], si conclude che « *nel caso $S =$ costante basta aggiungere al sistema di Schiff l'equazione* (8) *perchè sussista l'equivalenza fra questo e il sistema di Euler-Poisson* ».

Conviene cercare l'espressione della (8) in funzione di S, T, U. Sostituendo ai vettori **k** e **a** le loro espressioni (V) e (7) e supponendo che sia $\alpha\Omega \wedge g \neq 0$, si può scrivere, poichè è $U' \neq 0$,

$$[(h - T)(2Ug - S_0 . \alpha\Omega) + k(g^2 . \alpha\Omega - S_0 g) + U' . g \wedge \alpha\Omega] \times$$
$$\times [\alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega] = 0 ,$$

e da qui, sviluppando, tenendo conto delle (III) e delle (IV) e osservando che è

$$g \times \alpha\Omega' = g \times \Omega \wedge \alpha\Omega = S' = 0 ,$$

si ottiene l'equazione cercata

$$(10) \quad [kg^2 - (h - T) S_0 + g \wedge \alpha\Omega \times \alpha\Omega' + 2U . g \times \Omega - 2TS_0] U' = 0$$

che può anche scriversi, poichè è $U' \neq 0$, sotto la forma

$$(11) \qquad kg^2 - (h + T) S_0 + 2U . g \times \Omega + g \times \alpha\Omega \wedge \alpha\Omega' = 0 .$$

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota I di MAURO PICONE, ta dal Socio L. BIANCHI [1].

Nella teoria degli integrali di Lebesgue, il Fubini [2] ha ottenuto un risultato che enunciamo al modo seguente:

Sia E *un insieme di punti limitato e misurabile, in uno spazio* S_n *ad un numero qualunque* n *di dimensioni; siano* a e b *i limiti inferiore e superiore della coordinata* x *dei punti di* E; *designamo con* $G(\xi)$ *l'insieme sezione di* E *con l'iperpiano* $x = \xi$, ξ *essendo un valore dell'intervallo* (a, b); *sia infine* $f(x, y, z, \ldots)$ *una funzione definita in* E *ed ivi sommabile. Si ha che:*

1° *escluso al più un insieme* X' *di valori di* x *in* (a, b) *di misura (lineare) nulla, l'insieme* $G(x)$ *è misurabile in un* S_{n-1} [3];

2° *escluso al più un insieme* $X, X \geq X'$, *di valori di* x *in* (a, b) *di misura (lineare) nulla, la funzione* $f(x, y, z, \ldots)$ *è sommabile in* $G(x)$;

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

(2) Fubini, *Sugli integrali multipli* (questi Rendiconti, 1° semestre 1907).

(3) Non so se è stato mai osservato che: *Se l'insieme* E *è misurabile in* S_n *al modo di Borel, l'insieme* $G(x)$ *è sempre, senza eccezione, misurabile in* S_{n-1} *pur esso al modo di Borel e di classe non superiore a quella di* E.