ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Classe derivata di una funzione.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO [1].

In una Nota recante lo stesso titolo [2], C. Burali-Forti ha proposto di considerare per ogni funzione $f(x)$, non soltanto i due *numeri derivati*, ma tutta una classe di numeri, che chiama *classe derivata*, in ogni punto a che appartenga al gruppo G ove la funzione è definita e ne sia punto limite.

È costituita da tutti i valori *limiti* (e precisamente dai Lm di G. Peano) della funzione

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1}$$

nel punto a [3], ossia è la *classe limite* (di Peano) di questa funzione. Come tale, è [4] chiusa ed ha per estremi (massimo e minimo) i *limiti di indeterminazione* di $\varphi(x)$ in a, i quali, come è noto, sono i numeri derivati di $f(x)$ in a.

L'Autore incita allo studio del nuovo ente, stimandolo molto utile ed interessante. E su ciò non v'ha dubbio.

Qui voglio osservare che già preesisteva qualche estensione del concetto di derivata, sebbene sporadica e diversamente concepita; quindi è naturale domandarsi che relazione vi sia tra essa e la classe del Burali-Forti.

A. Khintchine [5] ha considerato il caso in cui esiste in G un sottogruppo S, misurabile e di densità 1 nel punto a, tale che il rapporto incrementale (1) di $f(x)$, *considerata soltanto nei punti di* S, ammetta il limite (ordinario) nel punto a; questo limite ha chiamato *derivata asintotica* di $f(x)$ in a [6].

Generalizzando, si può dire *una derivata* di $f(x)$ in a ogni numero ($+\infty$ e $-\infty$ inclusi) che sia derivata (ordinaria) di $f(x)$ in a allorchè $f(x)$ vien considerata soltanto in un conveniente sottogruppo S di G conte-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1919.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1°.

(3) Un numero l *è un* Lm di $\varphi(x)$ in a se, dato un numero $\varepsilon>0$, in ogni intorno di a esiste un numero (almeno) x di G tale che risulti $|\varphi(x)-l|<\varepsilon$. Analoga definizione per $+\infty$ (o $-\infty$) *è un* Lm.

(4) Per un teorema di R. Bettazzi che ha chiamato *confini* i Lm (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. VI, 1892, pag. 173).

(5) C. R, t. 162, 1918, pag. 287.

(6) Ed ha dimostrato che una funzione è la derivata asintotica del suo integrale indefinito di Denjoy.

nente a ed avente a come punto limite; e si può dire *classe derivata* di $f(x)$ in a l'insieme di tali numeri.

Questa classe coincide con quella definita dal Burali-Forti.

Perchè i suoi numeri sono limiti ordinarii di (1) in convenienti sottogruppi di G, ed io ho dimostrato che [1]:

Ogni numero della classe limite (di Peano) di una funzione in un punto limite a *del suo campo* G, *e nessun altro numero, gode della proprietà di essere il limite ordinario della funzione, considerata solo nei punti di un conveniente sottogruppo* S *di* G *avente* a *come punto limite* [2].

Matematica. — *Sopra due classi di curve gobbe.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Corrisp. G. Peano [3].

1. Delle curve C_1 che hanno per binormali le normali principali di una curva assegnata C si sono occupati di recente T. Hayashi [4] e M. Bottasso [5]: aggiungo qui una proprietà non rilevata dagli Autori predetti, e cioè: lo spigolo di regresso della sviluppabile, luogo degli assi delle eliche circolari osculatrici a C, è una curva C_1. E dimostro che la rigata, luogo degli assi delle dette eliche osculatrici ad una curva C è sviluppabile solo se la C è tale che le sue normali principali siano le binormali di un'altra curva, oppure è un'elica cilindrica.

Se P descrive una curva data, Q è un punto rigidamente connesso al triedro fondamentale in P, perchè Q descriva una curva tale che archi corrispondenti sulle curve P e Q siano proporzionali, occorre che la curva P soddisfi ad una equazione intrinseca della forma

$$a^2/\varrho^2 + b^2/\tau^2 + 2h/\varrho\tau = c^2$$

con a^2, b^2, c^2, $2h$ costanti e $a^2b^2 \leq h^2$; il caso dell'eguaglianza dà manifestamente una curva di Bertrand. Solo per codeste curve la curvatura ri-

(1) Cfr. il n. 6 della mia Memoria: *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo* (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, vol. LXVI, n. 5).

(2) Giovandomi di questa proprietà, ho potuto fare (nella Memoria citata) uno studio approfondito del comportamento di una funzione, di una o più variabili, intorno a un punto limite del suo campo; in particolare, ho potuto estendere un bel teorema (a prima vista paradossale) di W. H. Young.

(3) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1919.

(4) T. Hayashi, *On the curve whose principal normals are the binormals of a given curve.* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. LIV (1916).

(5) M. Bottasso, *Problemi sulla determinazione delle linee sghembe.* In « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio in occasione del suo LXXV genetliaco », Torino, Bocca, 1918.