ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Conviene cercare l'espressione della (8) in funzione di S, T, U. Sostituendo ai vettori **k** e **a** le loro espressioni (V) e (7) e supponendo che sia $\alpha\Omega \wedge \mathrm{g} \neq 0$, si può scrivere, poichè è $\mathrm{U}' \neq 0$,

$$[(h-\mathrm{T})(2\mathrm{Ug}-\mathrm{S}_0 . \alpha\Omega)+k(\mathrm{g}^2 . \alpha\Omega-\mathrm{S}_0\mathrm{g})+\mathrm{U}' . \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega] \times \\ \times [\alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega] = 0 ,$$

e da qui, sviluppando, tenendo conto delle (III) e delle (IV) e osservando che è

$$\mathrm{g} \times \alpha\Omega' = \mathrm{g} \times \Omega \wedge \alpha\Omega = \mathrm{S}' = 0 ,$$

si ottiene l'equazione cercata

$$(10) \quad [k\mathrm{g}^2 - (h-\mathrm{T})\mathrm{S}_0 + \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega \times \alpha\Omega' + 2\mathrm{U} . \mathrm{g} \times \Omega - 2\mathrm{TS}_0]\, \mathrm{U}' = 0$$

che può anche scriversi, poichè è $\mathrm{U}' \neq 0$, sotto la forma

$$(11) \qquad k\mathrm{g}^2 - (h+\mathrm{T})\mathrm{S}_0 + 2\mathrm{U} . \mathrm{g} \times \Omega + \mathrm{g} \times \alpha\Omega \wedge \alpha\Omega' = 0 .$$

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota I di MAURO PICONE, ta dal Socio L. BIANCHI [1].

Nella teoria degli integrali di Lebesgue, il Fubini [2] ha ottenuto un risultato che enunciamo al modo seguente:

Sia E *un insieme di punti limitato e misurabile, in uno spazio* S_n *ad un numero qualunque* n *di dimensioni; siano* a e b *i limiti inferiore e superiore della coordinata* x *dei punti di* E; *designamo con* $\mathrm{G}(\xi)$ *l'insieme sezione di* E *con l'iperpiano* $x = \xi$, ξ *essendo un valore dell'intervallo* (a, b); *sia infine* $f(x, y, z, \ldots)$ *una funzione definita in* E *ed ivi sommabile. Si ha che:*

1° *escluso al più un insieme* X' *di valori di* x *in* (a, b) *di misura (lineare) nulla, l'insieme* $\mathrm{G}(x)$ *è misurabile in un* S_{n-1} [3];

2° *escluso al più un insieme* $\mathrm{X}, \mathrm{X} \geq \mathrm{X}'$, *di valori di* x *in* (a, b) *di misura (lineare) nulla, la funzione* $f(x, y, z, \ldots)$ *è sommabile in* $\mathrm{G}(x)$;

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

(2) Fubini, *Sugli integrali multipli* (questi Rendiconti, 1° semestre 1907).

(3) Non so se è stato mai osservato che: *Se l'insieme* E *è misurabile in* S_n *al modo di Borel, l'insieme* $\mathrm{G}(x)$ *è sempre, senza eccezione, misurabile in* S_{n-1} *pur esso al modo di Borel e di classe non superiore a quella di* E.

3° *designamo con*

$$(1)\qquad \int_{G(x)} f(x, y, z, \ldots)\, dy\, dz \ldots ,$$

una funzione delle x che ha il valore dell'integrale di Lebesgue della funzione f, esteso a $G(x)$, per ogni valore di x in (a, b) fuori dell'insieme X, *e che è arbitrariamente definita in* X; *la funzione* (1) *è sommabile in* (a, b), *e si ha*

$$(2)\qquad \int_E f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots = \int_a^b dx \int_{G(x)} f(x, y, z, \ldots)\, dy\, dz \ldots \text{ (}^1\text{)}.$$

Secondo questo teorema di Fubini si può dunque sempre ricondurre il calcolo dell'integrale di una qualunque funzione sommabile, esteso ad un insieme di S_n, al calcolo di un integrale esteso ad un insieme di un S_{n-1} variabile, seguìto da quello di un integrale semplice (esteso ad un intervallo) e quindi anche al successivo calcolo di n integrali semplici; fornisce sempre, cioè, come si dice, *la riduzione degli integrali multipli.*

Per le applicazioni alle ordinarie questioni di Analisi (ad esempio, nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, delle equazioni integrali, ecc.) mi è parso sempre utilissimo stabilire sotto quali condizioni il teorema di Fubini rimane valido nel campo delle funzioni non limitate che ammettono un integrale generalizzato di Riemann, *imponendo, nella riduzione, di non eseguire che integrali di Riemann* [2].

In questa e in successive Note esamino appunto la questione ora enunciata, giungendo a regole nuove per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann, regole che si manifestano soprattutto (cfr. gli esempî al n. 6) assai utili per le applicazioni indicate.

Non così mi pare si possa dire delle regole già note che si trovano nei trattati, le quali sono raramente applicabili e talune riescono quasi sempre di laboriosa applicazione. Ai criterî ottenuti qui sono vicini quelli dati dal De la Vallée-Poussin (nel suo *Cours d'Analyse*) nel caso particolare di una funzione f non negativa, generalmente continua con punti isolati di discontinuità.

Avendo in vista le applicazioni, mi sono limitato a stabilire quei criterî considerando le condizioni di cose che si presentano, d'ordinario, nei problemi dell'Analisi. Ma non è difficile stabilire gli stessi criterî in ipotesi molto più larghe, abbandonando, per esempio, quella della misurabilità secondo Jordan degli insiemi ai quali si estendono gli integrali.

(1) Questo risultato è dimostrato nel modo più semplice ai n.i 43 e 44 del recente brillante libro del De la Vallée-Poussin, *Integrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* [Paris, Gauthier-Villars, 1916, collection Borel].

(2) Uso locuzioni e notazioni del *Cours d'Analyse infinitésimale* del De la Vallée-Poussin.

1. Chiamiamo qui *dominio* ogni insieme di punti E, ad un numero qualunque di dimensioni, limitato, chiuso, dotato di punti interni e misurabile (J) [1]; *porzione* di un dominio E ogni dominio contenuto in E. Sia P un punto del dominio E: diremo che questo punto è *singolare per l'integrabilità* (R) [al senso di Riemann] di una funzione f, se, comunque si assegni un numero positivo ε, si può sempre trovare una porzione di E, contenente P, di diametro minore di ε, sulla quale la funzione non è integrabile (R).

La funzione f possegga nel dominio E un'infinità di punti singolari per la sua integrabilità (R). Questi punti costituiscono un insieme F che si dimostra essere chiuso e che supporremo pur esso misurabile (J). Se la funzione f riesce definita (limitata e) integrabile (R) in ogni dominio $\varDelta$ contenuto in $G = E - F$, dirò che *l'insieme* F *è in* E *l'insieme dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *della funzione* f.

Può darsi che

$$\int_{\varDelta} f(P)\, dP$$

tenda ad un limite determinato e finito allorchè la misura di $\varDelta$ tende alla misura di $G = E - F$. Se ciò avviene, diremo, con Jordan [2], che *la funzione f possiede un integrale generalizzato* (R) *esteso al dominio* E, od anche che *la funzione f è in* E *integrabile* (R) *in modo generalizzato*. Porremo dunque per definizione

$$(\mathrm{R})\int_{E} f(P)\, dP = \lim_{m\varDelta = mG} \int_{\varDelta} f(P)\, dP,$$

se questo limite è determinato e finito.

Nel Jordan (loc. cit.) è dimostrato che:

1°. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f possegga un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E, è che, ove il dominio $\varDelta$ varii in G, sia

$$\lim_{m\varDelta = 0} \int_{\varDelta} f(P)\, dP = 0.$$

2°. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f possegga un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E, è che un tale integrale

(1) Misurabile secondo Jordan. Quando diremo che un insieme è *misurabile*, senza altro, intenderemo che è misurabile secondo Lebesgue. Così pure la *misura* (J) di un insieme sarà la sua misura secondo Jordan; la *misura* sarà la sua misura secondo Lebesgue.

(2) Jordan, *Cours d'Analyse* (2me édition), t. II, pag. 75 e segg.

sia posseduto dalla funzione $|f|$; e si ha allora:

$$\left|(R)\int_E f(P)\,dP\right| \leq (R)\int_E |f(P)|\,dP \text{ [1]}.$$

2. Dimostriamo il

TEOREMA I. — *Se la funzione f possiede un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E, essa è sommabile in G, e risulta*

$$(R)\int_E f(P)\,dP = (L)\int_G f(P)\,dP.$$

Designamo con H quella parte della frontiera di G che appartiene a G. Essendo G misurabile (J), esisterà una successione di dominii

$$(3)\qquad \varDelta_1, \varDelta_2, \ldots, \varDelta_n, \ldots$$

contenenti, ciascuno, il precedente e tutti contenuti in G, avente per limite $G - H$. Gli insiemi

$$H + \varDelta_1, H + \varDelta_2, \ldots, H + \varDelta_n, \ldots$$

avranno dunque per limite G. Poniamo:

$$G_A = G(f(P) > A), \quad G_A^{(n)} = [H + \varDelta_n](f(P) > A) \text{ [2]};$$

dico che G_A è misurabile. Si ha invero:

$$G_A = \lim_{n=\infty} G_A^{(n)},$$

mentre, essendo H di misura nulla e $f(P)$ integrabile (R) in $\varDelta_n$, l'insieme $G_A^{(n)}$isurabile.

Ne segue, intanto, che $f(P)$ è misurabile in G. Anche $|f|$ possiede un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E; e se dimostriamo la sommabilità di $|f|$ in G, ne seguirà quella di f. Prendiamo la successione (3) per modo che risulti

$$mG - m\varDelta_n < \frac{1}{n^2},$$

e designamo con $|f|_n$ la funzione $|f|$ limitata al numero positivo n [3].

[1] Una rigorosa trattazione elementare dell'argomento, nella quale sono ottenuti risultati assai utilmente avvicinabili a quelli del Jordan, trovasi nel libro del Bagnera: *Corso d'Analisi infinitesimale* (Palermo, 1915), n.i 105, 106, 117, 118, 119, 120, 121, 130, 132, 133, 134.

[2] Con la notazione $E(f(P) > A)$ indico quella parte di E in cui è $f(P) > A$.

[3] Poniamo cioè $|f|_n = |f|$ quando è $|f| \leq n$, $|f|_n = n$, quando è $|f| > n$.

Si ha:

$$(4) \qquad (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P} =$$

$$= (\mathrm{L})\int_{\Lambda_n} |f|_n \, d\mathrm{P} + (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}-\Lambda_n} |f|_n \, d\mathrm{P} \leq (\mathrm{R})\int_{\Lambda_n} |f| \, d\mathrm{P} + \frac{1}{n};$$

ne segue che l'integrale

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P}$$

è, rispetto ad n, limitato, e quindi la sommabilità di $|f|$ e di f.

Dalle (4) si deduce poi, passando al limite per n infinito,

$$(5) \qquad (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} \leq (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mathrm{P}.$$

D'altra parte, se consideriamo un qualunque dominio Λ contenuto in G, si ha:

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P} \right\} \geq \lim_{n=\infty} \left\{ (\mathrm{L})\int_{\Lambda} |f|_n \, d\mathrm{P} \right\} = (\mathrm{R})\int_{\Lambda} |f| \, d\mathrm{P},$$

poichè, da un certo momento in poi, si avrà, in Λ, $|f|_n = |f|$. Facendo ora tendere la misura di Λ a quella di G, si potrà asserire che

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} \geq (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mathrm{P},$$

relazione questa che, con la (5), dimostra completamente il nostro teorema per la funzione non negativa $|f|$. Ma il teorema risulta subito dimostrato anche per una funzione f, di segno comunque variabile, pensando che, posto

$$2f_1 = |f| + f, \quad 2f_2 = |f| - f,$$

si ha

$$f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f = f_1 - f_2, \quad |f| = f_1 + f_2$$

e che dall'integrabilità (R) in modo generalizzato di $|f|$ in E, ne segue quella di f_1 e di f_2.