ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche del suolo elastico.* Nota II di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nella Nota I [1] ho determinato un tipo di soluzione generale del problema del suolo nel caso della simmetria.

Tale soluzione contiene due funzioni armoniche arbitrarie, costruite a loro volta mediante due funzioni $\lambda(r)$, $\chi(r)$ del raggio vettore r del piano.

La risoluzione di un dato problema del suolo consiste nel determinare queste ultime funzioni che soddisfano nei varî casi a quattro equazioni integrali: combinando tali equazioni a coppie, otteniamo i quattro tipi di problemi classici.

Le dette equazioni integrali, aventi per nucleo una funzione cilindrica di Bessel, sono state risolte dall'Hankel.

Dal seguito apparirà evidente la semplificazione, rispetto alle trattazioni di Boussinesq e di Cerruti [2], dalle quali si potrebbe dedurre la specificazione relativa al caso simmetrico.

La nuova trattazione ha essenzialmente il vantaggio di applicare direttamente le funzioni potenziali simmetriche studiate dal Beltrami [3] e di ridurre ad un tipo unico la risoluzione dei problemi.

3. Le equazioni integrali dell'Hankel. Deformazione per dati spostamenti al contorno. — L'Hankel dimostra un teorema da cui discende immediatamente il seguente:

Se $f(x)$ è una funzione che soddisfa nell'intervallo $0, \infty$ alle condizioni di Dirichlet e se $I_n(x)$ rappresenta la funzione cilindrica di Bessel, di prima specie e d'ordine n, si ha

$$\int_0^\infty y\, I_n(y\xi)\, dy \int_0^\infty x f(x)\, I_n(yx)\, dx = f(\xi), \tag{15}$$

se $\xi > 0$. Se $\xi = 0$, l'integrale vale $f(0)$ per $n = 0$, e zero per $n > 0$. Quindi l'equazione integrale

$$\int_0^\infty x\varphi(x)\, I_n(yx)\, dx = f(y) \tag{16}$$

(1) Vedi questi Rendiconti, ottobre 1919.

(2) Vedi per es. V. Cerruti, *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Mem. Acc. Lincei, *13*, 1882; I. Boussinesq, *Equilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur*, C. R. Acad. sciences, Paris, *86*, 1878.

(3) Vedi E. Beltrami, loc. cit., § 2.

è soddisfatta da

$$\varphi(x) = \int_0^\infty y\, f(y)\, \mathrm{I}_n(y\xi)\, d\xi\,, \tag{17}$$

coll'avvertenza che, se $n > 0$, debba essere $f(0) = 0$ [1].

Il risultato precedente ci permette di ottenere la risoluzione del problema del suolo dalle formole (I) (II) stabilite nella Nota I.

Infatti, siano dati in primo luogo i valori di u, v, w per $z = 0$; essi saranno funzioni della sola r. Dalla terza delle (I) si ottiene per la (7) (moltiplicando e dividendo per s sotto il segno di integrale)

$$w(0, r) = \mathrm{W}(0, r) = \int_0^\infty \mathrm{I}_0(rs)\, s\, \frac{\lambda(s)}{s}\, ds\,, \tag{18}$$

da cui si ha, giusta le (16) e (17),

$$\frac{\lambda(r)}{r} = \int_0^\infty \mathrm{I}_0(rt)\, w(0, t) \,.\, t\, dt\,. \tag{18'}$$

Il dare u, v equivale, nel caso nostro della simmetria, a dare lo spostamento $\sigma(r)$ lungo il raggio vettore r nel piano. Si osservi inoltre che deve essere, per la condizione di simmetria,

$$\sigma(0) = 0\,. \tag{19}$$

Ma, dalle (I) (II),

$$\sigma(r) = -\alpha\, \theta_1(0, r) + \mathrm{W}_1(0, r)\,;$$

quindi, per le (6') (7'),

$$-\int_0^\infty \mathrm{I}_0'(rs) \left[\alpha \frac{\chi(s)}{s} + \lambda(s) \right] ds = \sigma(r)\,.$$

Ma, come è ben noto [2],

$$\mathrm{I}_0'(x) = -\mathrm{I}_1(x)\,; \tag{20}$$

cosicchè χ e λ dovranno soddisfare alla equazione

$$\int_0^\infty \mathrm{I}_1(rs)\, s \left[\alpha \frac{\chi(s)}{s^2} + \frac{\lambda(s)}{s} \right] ds = \sigma(r)\,. \tag{21}$$

Ricordando la (19), si ottiene di qui

$$\alpha \frac{\chi(r)}{r^2} + \frac{\lambda(r)}{r} = \int_0^\infty \mathrm{I}_1(st)\, \sigma(t)\, t\, dt\,, \tag{21'}$$

[1] Vedi H. Hankel, *Die Fourier'schen Reihen und Integrale der Cilinderfunctionen*, Mathematische Annalen, VIII (1875), pp. 481-482.

[2] Vedi per es. C. Neumann, *Bessel'schen Functionen*, Leipzig, 1867, pag. 10.

la quale, essendo già noto $\frac{\lambda(r)}{r}$ per la (18′), mi determina χ: il problema è così risolto.

4. Deformazione per date tensioni al contorno. Casi misti. — Se n indica la normale interna al suolo e si suppone la densità $\varrho = 1$, le equazioni ai limiti, siccome $\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{dn} = 0$, $\frac{dz}{dn} = 1$, diventano [1]

$$
(22) \qquad \begin{aligned}
&\mathrm{L} + \omega^2 \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} + \omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = 0 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\mathrm{N} + 2\omega^2 \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\, \theta_{z=0} = 0 .
\end{aligned}
$$

Delle due prime equazioni (22) basterà poi tener conto di una, p. es. la prima. Ma, per le (I) (II),

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} &= x \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{x}{r}\left[(\alpha+\beta)\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial z}\right]_{z=0} \\
&= -\frac{x}{r}\int_0^\infty \mathrm{I}_1(rs)\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}\chi(s) - s\,\lambda(s)\right] ds .
\end{aligned}
$$

Basta infatti ricordare le espressioni (6′) (7′) di θ_1, W_1, la (20), e inoltre che, per le (12),

$$\alpha + \beta = \frac{\Omega^2}{\omega^2} .$$

Per di più

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\right)_{z=0} = -\frac{x}{r}\int_0^\infty \mathrm{I}_1(rs)\, s\, \lambda(s)\, ds ;$$

quindi la prima delle (22) diventa, quando si osservi che

$$\mathrm{L} = \frac{x}{r}\, p(r) \quad , \quad \mathrm{M} = \frac{y}{r}\, p(r) ,$$

e si tenga conto dei risultati precedenti, e dividendo per $\frac{x}{r}$,

$$(23) \qquad \int_0^\infty \mathrm{I}_1(rs)\, \Omega^2 s\, \frac{\chi(s)}{s}\, ds = p(r) .$$

Di qui si ha, osservando che, per le condizioni di simmetria,

$$(24) \qquad p(0) = 0 ,$$

$$(23') \qquad \frac{\chi(r)}{r} = \frac{1}{\Omega^2}\int_0^\infty \mathrm{I}_1(rt)\, p(t) . t\, dt .$$

[1] Vedi Marcolongo, loc. cit., pag. 206. Le prime due scritte appartengono al secondo tipo di equazioni ai limiti, la terza al primo tipo [formole (2) (2′)].

Vogliamo ora tener conto della terza delle (22). Ora abbiamo, dalla terza delle (I),

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} = \left(-\beta\theta + \frac{\partial W}{\partial z}\right)_{z=0} = -\int_0^\infty I_0(rs)\,[\beta\chi(s) + s\,\lambda(s)]\,ds,$$

e, dalla (6),

$$\theta_{z=0} = \int_0^\infty I_0(rs)\,\chi(s)\,ds\,;$$

la terza delle (22) dà, ricordando che per la (12)

$$2\omega^2\beta = \Omega^2 - \omega^2,$$

e che

$$N = N(r),$$

$$\int_0^\infty I_0(rs)\left[2\omega^2\,\lambda(s) + \omega^2\frac{\chi(s)}{s}\right]s\,ds = N(r)\,, \tag{24}$$

da cui

$$2\lambda(r) + \frac{\chi(r)}{r} = \frac{1}{\omega^2}\int_0^\infty I_0(rt)\,N(t)\,.\,t\,dt\,. \tag{24'}$$

Ma conoscendosi di già $\chi(r)$ per la (23'), si ricaverà di qui $\lambda(r)$ ed il problema è risolto.

I casi misti sono ora completamente risolti. Se infatti supponiamo dati, in superficie, L, M, w, allora le (23') (18') mi dànno rispettivamente $\chi(r)$, $\lambda(r)$: che se suppongo invece dati u, v, N, allora le (21') (24') formano un sistema nelle due incognite $\chi(r)$, $\lambda(r)$ avente per determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

che è diverso da zero, e quindi sono risolubili rispetto a λ e χ.

Meccanica. — *Sopra i moti di precessione regolare del giroscopio simmetrico pesante.* Nota di Lucio Silla, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Come è noto, per *giroscopio simmetrico* si intende un corpo rigido fissato per un suo punto O, il quale abbia eguali due dei tre momenti principali di inerzia relativi a quel punto, ad esempio A e B, ed abbia, inoltre, il baricentro G situato sull'*asse di figura* Oζ, cui spetta il terzo momento d'inerzia C.

Se il giroscopio simmetrico è *pesante*, si dimostra che, nel movimento del corpo, l'asse Oζ si sposta restando sempre compreso entro lo spazio limitato da due falde coniche di rotazione attorno alla verticale Oz, col ver-