ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

nente a ed avente a come punto limite; e si può dire *classe derivata* di $f(x)$ in a l'insieme di tali numeri.

Questa classe coincide con quella definita dal Burali-Forti.

Perchè i suoi numeri sono limiti ordinarii di (1) in convenienti sottogruppi di G, ed io ho dimostrato che [1]:

Ogni numero della classe limite (di Peano) di una funzione in un punto limite a *del suo campo* G, *e nessun altro numero, gode della proprietà di essere il limite ordinario della funzione, considerata solo nei punti di un conveniente sottogruppo* S *di* G *avente* a *come punto limite* [2].

Matematica. — *Sopra due classi di curve gobbe.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Corrisp. G. Peano [3].

1. Delle curve C_1 che hanno per binormali le normali principali di una curva assegnata C si sono occupati di recente T. Hayashi [4] e M. Bottasso [5]: aggiungo qui una proprietà non rilevata dagli Autori predetti, e cioè: lo spigolo di regresso della sviluppabile, luogo degli assi delle eliche circolari osculatrici a C, è una curva C_1. E dimostro che la rigata, luogo degli assi delle dette eliche osculatrici ad una curva C è sviluppabile solo se la C è tale che le sue normali principali siano le binormali di un'altra curva, oppure è un'elica cilindrica.

Se P descrive una curva data, Q è un punto rigidamente connesso al triedro fondamentale in P, perchè Q descriva una curva tale che archi corrispondenti sulle curve P e Q siano proporzionali, occorre che la curva P soddisfi ad una equazione intrinseca della forma

$$a^2/\varrho^2 + b^2/\tau^2 + 2h/\varrho\tau = c^2$$

con $a^2, b^2, c^2, 2h$ costanti e $a^2b^2 \leq h^2$; il caso dell'eguaglianza dà manifestamente una curva di Bertrand. Solo per codeste curve la curvatura ri-

(1) Cfr. il n. 6 della mia Memoria: *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo* (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, vol. LXVI, n. 5).

(2) Giovandomi di questa proprietà, ho potuto fare (nella Memoria citata) uno studio approfondito del comportamento di una funzione, di una o più variabili, intorno a un punto limite del suo campo; in particolare, ho potuto estendere un bel teorema (a prima vista paradossale) di W. H. Young.

(3) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1919.

(4) T. Hayashi, *On the curve whose principal normals are the binormals of a given curve.* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. LIV (1916).

(5) M. Bottasso, *Problemi sulla determinazione delle linee sghembe.* In « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio in occasione del suo LXXV genetliaco », Torino, Bocca, 1918.

spetto ad una retta rigidamente connessa al triedro fondamentale è costante e la retta è appunto la PQ. Non può essere P rigidamente connesso al triedro fondamentale di Q, salvo il caso che la curva P sia un'elica cilindrica e PQ la sua retta rettificante.

2. Sia C una curva gobba, $P(s)$ un suo punto. L'elica circolare passante per P e che ha ivi lo stesso triedro fondamentale ed ha flessione e torsione uguali a quelle di C in P si dice osculatrice alla C in P (¹).

Il raggio r del cilindro circolare sul quale sta l'elica e la sua inclinazione ϑ sono dati da

$$r = \varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) \quad , \quad \varrho/\tau = -\operatorname{cotg}\vartheta .$$

Poichè le generatrici del cilindro sono parallele alla retta rettificante dell'elica e questa ha in P la stessa retta rettificante di C, l'asse dell'elica osculatrice sarà dato da

$$(1) \qquad Q = P + \mathbf{n}\,\varrho\,\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) + x\,(\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau)$$

ove x è una variabile numerica.

La (1), ritenendo variabile s ed x, è l'equazione della rigata luogo degli assi delle eliche osculatrici a C. Perchè codesta rigata sia sviluppabile occorre e basta che sia

$$(2) \qquad [P + \mathbf{n}\,\varrho\,\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2)]' \times [\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau] \wedge [\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau]' = 0$$

indicando con l'accento la derivazione rapporto ad s.

Eseguendo la derivazione (escludendo che la linea sia piana), l'equazione (1) dà

$$(2') \qquad [\varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2)]'\,[\tau'/\tau^2 - \varrho'/\varrho^2] = 0 .$$

Se è nullo il secondo fattore, la C è un'elica cilindrica; gli assi delle eliche osculatrici formano il cilindro il quale ha per direttrice normale la evoluta della sezione retta S del cilindro su cui sta C. Invero, se ψ è l'inclinazione dell'elica C, è

$$\varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) = \varrho \operatorname{sen}^2 \psi ,$$

ed il secondo membro esprime il raggio di curvatura della sezione retta S nel punto che sta sulla generatrice passante per P.

Se è nullo il primo fattore della (2'), sarà allora, denotando con k una costante,

$$(3) \qquad s/\varrho = k(s/\varrho^2 + s/\tau^2)$$

(¹) Vedi ad es. D'Ocagne, *Cours de Géometrie descriptive et de Géometrie infinitésimale*. Paris, Gauthier-Villars, 1896.

e questa è la condizione a cui deve soddisfare C perchè le sue normali principali possono essere le binormali di un'altra curva ([1]); questa è poi

$$(4) \qquad Q = P + k\mathbf{n}.$$

Derivando rapporto ad s

$$(5) \qquad Q' = \mathbf{t}(\varrho - k)/\varrho - \mathbf{b}\, k/\tau$$

e, per la (3),

$$Q' \wedge (\mathbf{b}\, 1/\varrho - \mathbf{t}\, 1/\tau) = \mathbf{n} \,\{ k/\tau^2 - (\varrho - k)/\varrho^2 \} = 0.$$

Ciò mostra che la tangente alla linea (4) in Q è parallela alla retta rettificante in P alla C; onde la (4) è lo spigolo di regresso della sviluppabile

$$Q = P + k\mathbf{n} + x(\mathbf{b}\, 1/\varrho - \mathbf{t}\, 1/\tau),$$

luogo degli assi delle eliche osculatrici a C.

Che poi la (4) abbia per binormali le normali principali di C risulta dalla Nota di Hayashi; ma si può ritrovare rapidamente. Dalla (5), tenendo conto della (3), si trae

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{(1 - k/\varrho)} \quad ; \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{t} \sqrt{1 - k/\varrho} - \mathbf{b} \sqrt{k/\varrho}$$

denotando con l'indice 1 gli elementi relativi alla linea Q. Derivando rapporto ad s_1 la seconda, si ha

$$1/\varrho_1\, \mathbf{n}_1 = \frac{d\varrho}{ds} \sqrt{k}\, [\sqrt{k}\, \mathbf{t} + \sqrt{\varrho - k}\, \mathbf{b}] / 2\varrho(\varrho - k)$$

da cui

$$1/\varrho_1 = \sqrt{k/\varrho}\, \frac{d\varrho}{ds} / 2(\varrho - k)$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{t} \sqrt{k/\varrho} + \mathbf{b} \sqrt{(\varrho - k)/\varrho}$$

onde

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n},$$

come si voleva provare.

Derivando l'ultima equazione rapporto ad s_1 si trae

$$\tau_1 = \sqrt{k(\varrho - k)},$$

altro risultato trovato dall'Hayashi, con procedimento assai laborioso.

([1]) T. Hayashi, loc. cit.

3. Il punto P descriva una curva C e sia Q un punto rigidamente connesso al triedro fondamentale di P. Se $\mathbf{u}$ è un vettore unitario rigidamente connesso al detto triedro, r una costante, sarà

$$Q = P + r\mathbf{u}. \tag{6}$$

Indicando con l'indice 1 gli elementi relativi alla curva Q, si ha derivando la (6) rapporto ad s [1]:

$$\mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + r\mathbf{f} \wedge \mathbf{u} \tag{7}$$

se si pone

$$\mathbf{f} = 1/\varrho\, \mathbf{b} - 1/\tau\, \mathbf{t}.$$

Dalla (7) si ricava

$$ds_1^2 = [1 + r^2 (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2]\, ds^2.$$

Perchè la curva Q abbia archi proporzionali ai corrispondenti archi di P occorre e basta che sia costante

$$(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2 = \mathbf{f}^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{f})^2 = 1/\varrho^2 + 1/\tau^2 - [1/\varrho\, \mathbf{u} \times \mathbf{b} - 1/\tau\, \mathbf{u} \times \mathbf{t}]^2.$$

Il numero $(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2$ rappresenta [2] il quadrato della curvatura di C secondo la retta $u \equiv P\mathbf{u}$ rigidamente connessa al triedro fondamentale di C. La curvatura secondo una retta siffatta non coincidente con gli spigoli del triedro fondamentale è nulla solamente se la curva è un'elica cilindrica e la retta u la generatrice del cilindro passante per P. Dunque la curva storta Q può avere arco uguale a quello della curva C solo se C è un'elica cilindrica e Q trovasi sopra la generatrice del cilindro, nel qual caso la curva Q è la curva P che ha subìta una traslazione. Prescindendo da questo caso, il rapporto μ fra l'arco s_1 e l'arco s è maggiore di 1.

Nella mia Nota citata ho dimostrato che per le curve C che soddisfano all'equazione intrinseca

$$a^2/\varrho^2 + b^2/\tau^2 + 2h/\tau\varrho = c^2 \tag{8}$$

ove le costanti a, b, h soddisfano alla limitazione

$$a^2 b^2 \leq h^2, \tag{9}$$

esiste una retta u relativamente alla quale la curvatura è costante; il vettore $\mathbf{u}$ unitario posto su u è definito da

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b})^2 = 1 - ka^2 \quad , \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{t})^2 = 1 - k^2 b^2 \quad , \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{t})(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = kh$$

$$k = 2 \left\{ a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2) + 4h^2} \right\}^{-1}$$

(1) Cfr. F. Sibirani, *Sulla curvatura delle linee gobbe.* Giornale di Battaglini, vol. LII (1914).

(2) F. Sibirani, loc. cit.

ed il quadrato della curvatura secondo u è $c^2 k$. Il rapporto μ è allora

$$\mu = \sqrt{1 + r^2 c^2 k}\,.$$

In particolare, se $a^2 b^2 = h^2$, la C è una curva di Bertrand, essendo il primo membro della (8) un quadrato perfetto. In questo caso $k = (a^2 + b^2)^{-1}$ ed il vettore $\mathbf{u}$ è dato da

$$\mathbf{u} \times \mathbf{t} = a(a^2 + b^2)^{-1/2} \quad , \quad \mathbf{u} \times \mathbf{b} = b(a^2 + b^2)^{-1/2}.$$

Si conclude:

Essendo C una curva storta, se e solo se soddisfa ad un'equazione intrinseca della forma (8), *colla condizione* (9), *od, in particolare, è una curva di Bertrand, esiste un punto Q rigidamente connesso al triedro fondamentale di C che descrive una curva C_1 tale che archi corrispondenti su C e C_1 sono proporzionali; l'eguaglianza si ha solo se C è un'elica cilindrica e Q si trova sulla generatrice del cilindro.*

Moltiplicando scalarmente la (7) per $\mathbf{u}$ si ha

$$\mathbf{t}_1 \times \mathbf{u} \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} \times \mathbf{u}\,.$$

Se $\mathbf{u}$ appartiene al piano normale di C appartiene anche al piano normale della curva Q; se $\mathbf{u}$ non appartiene al piano normale di C l'angolo che la tangente in Q forma con la retta PQ è costante se e solo se la curva C soddisfa ad una equazione della forma (8). Ma è impossibile che sia $\mathbf{u}$ rigidamente connesso al triedro fondamentale della curva Q; infatti se così fosse il rapporto fra l'arco di P e l'arco corrispondente di Q sarebbe minore di 1 e ciò contraddice ad un risultato precedente.

Chimica. — *Trasformazione di cicloesanoni in pirocatechine* [1]. Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli [2].

In una Nota [3] apparsa nel dicembre 1913 ho fatto conoscere che il composto di-bromurato risultante dall'alogenazione diretta del mentone non corrisponde alla struttura proposta per esso da Beckmann e Eickelberg [4], sì bene a quella espressa dalla formola I scritta qui sotto; e poco tempo dopo, nel marzo 1914, a guisa di riprova, ho dimostrato [5] che il bibro-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

[2] Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1919.

[3] Rendic. Acc. Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., pag. 569.

[4] Berichte, *29*, 418 [1896].

[5] Rendic. Acc. Lincei, vol. XXIII, serie 5ª. 1° sem., pag. 347.