ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Vogliamo ora tener conto della terza delle (22). Ora abbiamo, dalla terza delle (I),

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0}=\left(-\beta\theta+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\right)_{z=0}=-\int_0^\infty \mathrm{I}_0(rs)\left[\beta\chi(s)+s\,\lambda(s)\right]ds,$$

e, dalla (6),

$$\theta_{z=0}=\int_0^\infty \mathrm{I}_0(rs)\,\chi(s)\,ds\,;$$

la terza delle (22) dà, ricordando che per la (12)

$$2\omega^2\beta=\Omega^2-\omega^2,$$

e che

$$\mathrm{N}=\mathrm{N}(r),$$

(24) $$\int_0^\infty \mathrm{I}_0(rs)\left[2\omega^2\,\lambda(s)+\omega^2\,\frac{\chi(s)}{s}\right]s\,ds=\mathrm{N}(r),$$

da cui

(24′) $$2\lambda(r)+\frac{\chi(r)}{r}=\frac{1}{\omega^2}\int_0^\infty \mathrm{I}_0(rt)\,\mathrm{N}(t)\,.\,t\,dt\,.$$

Ma conoscendosi di già $\chi(r)$ per la (23′), si ricaverà di qui $\lambda(r)$ ed il problema è risolto.

I casi misti sono ora completamente risolti. Se infatti supponiamo dati, in superficie, L, M, w, allora le (23′) (18′) mi dànno rispettivamente $\chi(r)$, $\lambda(r)$: che se suppongo invece dati u, v, N, allora le (21′) (24′) formano un sistema nelle due incognite $\chi(r)$, $\lambda(r)$ avente per determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

che è diverso da zero, e quindi sono risolubili rispetto a λ e χ.

Meccanica. — *Sopra i moti di precessione regolare del giroscopio simmetrico pesante.* Nota di Lucio Silla, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Come è noto, per *giroscopio simmetrico* si intende un corpo rigido fissato per un suo punto O, il quale abbia eguali due dei tre momenti principali di inerzia relativi a quel punto, ad esempio A e B, ed abbia, inoltre, il baricentro G situato sull'*asse di figura* $O\zeta$, cui spetta il terzo momento d'inerzia C.

Se il giroscopio simmetrico è *pesante*, si dimostra che, nel movimento del corpo, l'asse $O\zeta$ si sposta restando sempre compreso entro lo spazio limitato da due falde coniche di rotazione attorno alla verticale Oz, col vertice comune in O, e le cui ampiezze θ_1 e θ_2 rappresentano i valori estremi fra i quali oscilla l'*angolo* θ *di nutazione*, cioè l'angolo $\zeta O z$.

Allorchè, per determinate condizioni iniziali, risulta $\theta_1 = \theta_2$, il moto del giroscopio è detto di *precessione regolare*: si osserva allora che l'asse di figura del corpo ruota con velocità angolare costante attorno alla verticale (*asse di precessione*) e descrive un cono rotondo, mentre il giroscopio ruota con velocità angolare costante attorno al proprio asse.

Nel moto di precessione regolare, adunque, l'angolo θ resta costante e θ' è perciò nulla; quindi *è nulla la nutazione dell'asse del corpo*. Il vettore ω (la così detta *rotazione*) è in tal caso risultante di due vettori: l'uno, ψ', diretto secondo Oz, che rappresenta la *velocità di precessione* dell'asse del giroscopio; l'altro, φ', diretto secondo $O\zeta$, che rappresenta la *velocità propria di rotazione* del giroscopio attorno al proprio asse. Tanto ψ' quanto φ' sono costanti; inoltre il parallelogrammo, di cui ψ' e φ' sono due lati adiacenti ed ω ne è la diagonale uscente da O, resta eguale a sè stesso durante tutto il movimento. Quanto ai due coni coniugati caratteristici della rotazione dei sistemi rigidi, essi sono entrambi rotondi, l'uno attorno alla verticale Oz, l'altro attorno all'asse $O\zeta$ del corpo, e il moto del giroscopio si può ottenere facendo rotolare, con moto uniforme, il secondo cono sul primo.

Lo studio delle precessioni regolari e di quelle pseudo-regolari del giroscopio simmetrico pesante è stato fatto magistralmente dal Klein [1], insieme con la discussione dei varî casi di stabilità del movimento.

In questa Nota io mi propongo di mostrare, con un procedimento assai rapido e semplice, come sia possibile di ottenere la condizione cui debbono soddisfare le costanti arbitrarie, affinchè il moto del giroscopio simmetrico pesante si riduca ad una precessione regolare, facendo uso di ovvie formole vettoriali e partendo direttamente dalla legge dinamica del momento risultante delle quantità di moto.

Assumiamo due terne di assi ortogonali, entrambe con l'origine nel punto O: l'una fissa e con l'asse z diretto secondo la verticale discendente, l'altra mobile, collegata col corpo e coincidente con gli assi principali di inerzia relativi al punto O, dei quali $O\zeta$ rappresenta, come si è detto, l'asse del giroscopio rivolto positivamente verso il baricentro G.

Sia $\mathbf{R}$ un vettore variabile; indichiamo con $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ il vettore derivato di $\mathbf{R}$ rispetto agli assi fissi e con $\dot{\mathbf{R}}$ quello rispetto agli assi mobili. Si ha, dalla teoria dei vettori,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} + \omega \wedge \mathbf{R}. \tag{1}$$

(1) F. Klein und A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels.*

dove $\boldsymbol{\omega}$ rappresenta, come si è dichiarato innanzi, il vettore *rotazione* della terna di assi collegati col corpo.

La legge del momento risultante delle quantità di moto si traduce, poi, nell'equazione vettoriale

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}, \tag{2}$$

in cui $\mathbf{K}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ rappresentano, rispettivamente, il momento dell'impulso e il momento delle forze applicate rispetto al punto O.

Denotiamo con   il vettore unitario secondo Oz (verticale discendente) e con χ il vettore unitario secondo Oζ (vettore costante rispetto agli assi collegati col corpo). Applicando la (1) al vettore $\mathbf{k}$, abbiamo l'equazione

$$0 = \dot{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}, \tag{3}$$

che riassume le ben note *formole del Poisson.*

Dalla (2), inoltre, si ottiene, a causa della (1),

$$\dot{\mathbf{K}} + \omega \wedge \mathbf{K} = \boldsymbol{\Gamma}. \tag{4}$$

Le formole (3) e (4) sono fondamentali per la deduzione del risultato che abbiamo in vista.

Ricordiamo che, per sua definizione, $\mathbf{K}$ è un vettore che ha per proiezioni Ap, Bq e Cr sugli assi mobili, quando p, q, r indichino le proiezioni, sugli stessi assi, del vettore ω. Noi possiamo anche rappresentare con

$$\mathrm{A}p + o\ , \ \mathrm{A}q + o\ , \ \mathrm{A}r + (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r$$

quelle proiezioni di $\mathbf{K}$, atteso che $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, per l'ipotesi fatta in principio; quindi sarà

$$\mathbf{K} = \mathrm{A}\omega + (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\chi. \tag{5}$$

Quanto al peso P del corpo, esso è rappresentato vettorialmente da $\mathrm{P}\mathbf{k}$; il suo momento $\boldsymbol{\Gamma}$, rispetto ad O, detta ζ_0 la distanza OG del baricentro dal punto fisso, è dunque così espresso:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \zeta_0 \chi \wedge \mathrm{P}\mathbf{k} = \mathrm{P}\zeta_0\, \chi \wedge \mathbf{k}\,;$$

od anche

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{P}\zeta_0\, \mathbf{h}\,, \tag{6}$$

avendo posto

$$\mathbf{h} = \chi \wedge \mathbf{k}\,. \tag{7}$$

Teniamo presente che le grandezze vettoriali incognite del problema sono ω e $\mathbf{k}$, le quali ci dànno la velocità angolare di rotazione del corpo e l'ubicazione della verticale rispetto al corpo; ossia le quantità scalari p, q, r di cui è noto il significato, e i coseni γ_1, γ_2 e γ_3 degli angoli che

Oz forma con la terna mobile. Per determinare quelle incognite noi disponiamo delle equazioni (2) e (3).

È appena necessario di rilevare che $\mathbf{K}$ è riducibile, sostanzialmente, alla incognita principale $\boldsymbol{\omega}$, mediante la (5); inoltre il momento $\boldsymbol{\Gamma}$ è riducibile a $\mathbf{k}$, a causa delle (6) e (7).

Notiamo, altresì, che dalla (4), proiettando i vettori che figurano in quell'equazione sull'asse $O\zeta$, si ricava

$$\frac{dr}{dt} = 0\,, \text{ e quindi } r = \text{costante.}$$

Affinchè il giroscopio abbia un moto di rotazione uniforme attorno alla verticale Oz, occorrerà che sia

$$\boldsymbol{\omega} = \pm\,\omega\mathbf{k}\,. \tag{8}$$

In questo caso il vettore $\mathbf{k}$ è immobile rispetto al corpo; quindi, rispetto alla terna di assi collegati col corpo, sarà $\mathbf{k}$ costante e, del pari, sarà costante il vettore $\mathbf{K}$, talchè dovrà aversi $\dot{\mathbf{K}} = 0$.

La condizione necessaria e sufficiente, adunque, affinchè si verifichi il moto anzidetto, è, per la

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = \boldsymbol{\Gamma}.$$

Questa condizione si può utilmente trasformare. Per la (6) noi possiamo, infatti, scrivere

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = \mathrm{P}\,\zeta_0\,\mathbf{k}\,;$$

e quindi ancora, formando il prodotto $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}$, mediante la (5),

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi} = \mathrm{P}\zeta_0\,\mathbf{h}\,. \tag{9}$$

Ma, dalla (8), si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\chi} = \pm\,\omega\,\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\chi}\,;$$

dunque sarà pure, per la (7),

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\,(\pm\,\omega\,\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\chi}) = \pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\omega\,\mathbf{h} = \mathrm{P}\zeta_0\,\mathbf{h}\,;$$

o, infine,

$$\{ \pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\omega - \mathrm{P}\zeta_0 \}\,\mathbf{h} = 0\,,$$

che equivale all'unica condizione scalare

$$\pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A}) r\omega - \mathrm{P}\zeta_0 = 0\,.$$

Passiamo ora alla ricerca delle *precessioni regolari*, nel supposto che sia asse di precessione la verticale Oz.

Detti, come in principio, φ' e ψ' rispettivamente i vettori componenti di ω secondo $\mathbf{k}$ (vettore unitario sulla verticale discendente) e secondo χ (vettore unitario secondo l'asse del giroscopio, diretto verso il baricentro), si ha, come *condizione caratteristica della precessione regolare*,

$$\omega = \psi' \mathrm{k} + \varphi' \chi . \tag{10}$$

Di qua si trae, in particolare, proiettando sull'asse $O\zeta$,

$$r = \psi' \gamma_3 + \varphi' , \tag{11}$$

con ψ' e φ' *costanti*.

Si tratta ora di vedere in qual modo si possa, con la condizione (10), rendere soddisfatte le equazioni (3) e (4).

Procuriamoci, innanzi tutto, nel modo più conveniente, e tenendo conto della (10), le espressioni di

$$\mathbf{K} \,,\; \dot{\mathbf{K}} \;\text{ e }\; \omega \wedge \mathbf{K} .$$

Dalla (5), a causa di (10), abbiamo frattanto

$$\mathbf{K} = \mathrm{A}\varphi' \mathrm{k} + \{ (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r + \mathrm{A}\varphi' \} \chi .$$

Di qua, derivando rispetto agli assi mobili, risulta

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathrm{A}\psi' \dot{\mathrm{k}} .$$

E se si tiene conto successivamente delle (3), (10) e (7), potremo ancora scrivere

$$\dot{\mathbf{K}} = - \mathrm{A}\psi' \omega \wedge \mathrm{k} = - \mathrm{A}\psi'\varphi' \chi \wedge \mathrm{k} = - \mathrm{A}\psi'\varphi' \mathbf{h} .$$

Infine, da (9), (10) e (7),

$$\omega \wedge \mathbf{K} = (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\psi' \mathrm{k} \wedge \chi = (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' \mathbf{h} .$$

Ora non resta che sostituire i valori di $\mathbf{K}$, $\dot{\mathbf{K}}$ ed $\omega \wedge \mathbf{K}$, così preparati, nella equazione fondamentale (4). Tenendo conto anche di (6), otteniamo

$$- \mathrm{A}\psi'\varphi' \mathrm{h} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' \mathrm{h} = \mathrm{P}\zeta_0 \mathrm{h} ;$$

ovvero

$$\{ \mathrm{A}\psi'\varphi' - (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' + \mathrm{P}\zeta_0 \} \mathrm{h} = 0 .$$

Così, per la (11), si perviene all'equazione definitiva

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, \psi'^2 \gamma_3 + \mathrm{C}\psi'\varphi' + \mathrm{P}\zeta_0 = 0 . \tag{12}$$

Questa relazione contiene soltanto elementi *scalari* che sono specifici per la questione meccanica di cui si tratta. Il problema generale della rotazione di un sistema rigido con un punto fisso dipende notoriamente da *sei* parametri arbitrarî, cioè da θ_0, ψ_0 e φ_0, valori iniziali degli angoli di Eulero, e da θ'_0, ψ'_0 e φ'_0 che individuano la rotazione iniziale del sistema. In un moto regolare di precessione si deve avere $\theta'_0 = 0$; quindi, se si stabilisce il valore di $\cos\theta_0$ cui deve essere, per tutti i tempi, eguale γ_3, ossia $\cos(\zeta Oz)$, l'equazione (12) dà la condizione alla quale debbono soddisfare i quattro elementi iniziali residui, affinchè il moto del giroscopio segua le leggi cinematiche della precessione regolare.

Fisica. — *La relazione fra l'effetto Corbino e l'effetto Hall al variare del campo magnetico e della temperatura.* Nota di C. Trabacchi, presentata dal Socio O. M. Corbino.

Già fin dal suo primo lavoro *Sulle azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto del campo*, il prof. Corbino aveva enunciato che tali azioni dipendono da un coefficiente E caratteristico del metallo, il quale è legato al coefficiente dell'effetto Hall, R, e alla conducibilità elettrica, c, per lo stesso metallo, dalla relazione

$$E = R \cdot c\,. \tag{1}$$

Questa relazione fu da lui precisata in un lavoro successivo, ricorrendo alla teoria di Drude dei fenomeni galvanomagnetici, convenientemente modificata in qualche punto, e riferendosi al coefficiente dell'effetto Hall *isotermico*. Essa fu all'ingrosso verificata per varî metalli da Adams e Chapman nel loro lavoro sull'effetto Corbino [1].

Nella deduzione teorica della formula (1) erano stati trascurati rispetto all'unità alcuni termini che possono considerarsi effettivamente di lieve entità per tutti i metalli, ma che non sono più trascurabili nel caso del bismuto. Anzi, secondo ulteriori deduzioni teoriche [2], sembrerebbe che proprio con la presenza di tali termini possano spiegarsi le forti variazioni di E, di R e di c, constatate nel bismuto al variare del campo, e ciò indipendentemente da altre variazioni che arrecherebbero ai coefficienti medesimi i mutamenti delle costanti elettroniche in campi di diversa intensità; sembra cioè che la presenza di quei termini darebbe luogo a mutamenti di quei coefficienti, proporzionali al quadrato del campo, ciò che all'ingrosso si verifica con l'esperienza, mentre solo le deviazioni dalla legge di proporzionalità delle variazioni al quadrato del campo sarebbero dovute ai mutamenti delle costanti [3].

(1) Adams e Chapman, Phil. Mag., VI serie, vol. XXVIII, 1914.
(2) Freda, Rend. Lincei, vol. XXV, 1916; Corbino, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918.
(3) Trabacchi, Rend. Lincei, vol. XXVIII, ser. V, 1° semestre, fasc. 3.