

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Fisica. — *Sulla gravitazione*. Nota III del Corrisp. Q. MAJORANA.

Considerazioni analitiche. — Cercherò ora di stabilire teoricamente la misura del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, partendo dai criteri qualitativi derivanti dalle ipotesi precedentemente fatte. Vedremo così, come si possano ricavare gli elementi necessari per realizzare un'esperienza di controllo, di parte delle ipotesi stesse. Fissiamo anzitutto le condizioni generali del problema. Occorre esprimere analiticamente il presunto fatto fisico dell'assorbimento, partendo da una modificazione della legge di Newton, tale che la forza agente fra due punti materiali, pur manifestandosi sempre sulla congiungente dei due punti stessi, sia, al crescere della distanza di questi, sempre più piccola di quanto vorrebbe quella legge. Ciò, beninteso, se i due punti si trovano immersi in un mezzo materiale di densità diversa da zero e costante. Ammetterò, inoltre, che a traverso una piccola distanza, lo smorzamento della forza gravitazionale sia proporzionale alla densità del mezzo. Se poi la densità del mezzo fosse variabile, o subisse delle discontinuità, il problema si complica ancora più, e per ora non è mia intenzione di affrontarne la trattazione generale. D'altronde, dato lo scopo di questo studio, a me occorre soltanto una guida, anche grossolanamente approssimata, per poter realizzare le esperienze di cui dirò in seguito. La legge di smorzamento, da sovrapporre a quella di Newton, può essere data da un fattore esponenziale, come ora farò vedere.

Primo metodo di calcolo. — Un primo metodo, relativamente semplice ma poco preciso, col quale si può trattare il problema, è il seguente: Sia una sfera materiale piena, di raggio R , e di densità vera costante ϱ_v . Essa eserciterebbe, secondo la legge di Newton, un'azione su un punto materiale esterno, proporzionale direttamente alla sua massa, ed inversamente al quadrato della distanza del suo centro da quel punto. La sua massa, secondo le cognizioni solite, è ciò che ora possiamo chiamare *massa vera*.

$$(1) \quad M_v = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_v.$$

Immaginiamo suddivisa tale sfera in infiniti strati sferici concentrici, di spessore dr , e diciamo r il raggio di uno qualunque di essi; r sarà variabile fra 0 ed R . La massa vera di uno strato qualsiasi, sarà data da

$$dM_v = 4\pi r^2 \varrho_v dr$$

e la sua azione su di un punto esterno equivale, secondo la legge di Newton,

a quella di una massa di egual valore, collocata nel centro della sfera. Facciamo ora intervenire l'ipotesi dello smorzamento: vogliamo supporre che lo strato esterno, non avendo su di sè altra materia, agisca ancora con tutto il valore della sua massa vera, sui punti materiali esterni, e cioè con $4\pi R^2 \varrho_v dr$; ma che, man mano che si considerino strati di raggio sempre più piccolo, sino ad arrivare al centro, l'azione gravitazionale vada sempre più smorzandosi, come se il valore della densità vera andasse decrescendo. E cioè, per il raggio r , lo strato avrebbe una massa apparente:

$$(2) \quad dM_a = 4\pi r^2 \varrho_v e^{-H(R-r)} dr,$$

dove H è un fattore di proporzionalità o di smorzamento.

Questa espressione soddisfa alla condizione al limite, per $R=r$, dello smorzamento nullo, e dà uno smorzamento massimo al centro. Si osserva però che, così scritta, l'equazione (2) non risponde con esattezza alle condizioni enunciate in principio. Infatti, se si considera un punto esterno soggetto all'azione dello strato superficiale della sfera, secondo quelle condizioni, dovrebbe l'azione della parte dello strato prospiciente al punto, non subire smorzamento alcuno; mentre gli elementi della parte opposta (*vedendo* il punto esterno alla sfera, solo a traverso spessori di questa, variabili da 0 a $2R$) subirebbero smorzamento nella loro azione; la differenza di smorzamento esiste poi anche fra i punti di qualsiasi altro strato interno. Ma, ciò non per tanto, ho scritto la (2); per cui effettivamente H non rappresenta una costante, ma una funzione tanto di r , quanto della distanza del punto esterno considerato dal centro della sfera.

Prescindo da tali considerazioni e supponendo, per semplicità di calcolo, H costante, si ha, integrando la (2),

$$M_a = 4\pi \varrho_v \int_0^R r^2 e^{-H(R-r)} dr = \frac{8\pi \varrho_v}{H^3} \left(\frac{H^2 R^2}{2} - HR - e^{-HR} + 1 \right).$$

Chiamando con p il prodotto HR , si ha anche

$$(3) \quad M_a = 8\pi \varrho_v R^3 \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p} \right).$$

Il quale risultato ci può esprimere la definita massa apparente della sfera, dentro i limiti di approssimazione risultanti dalla supposta, e certamente non vera, costanza di H al variare di r .

Dicendo

$$(4) \quad \Phi = 6 \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p} \right),$$

si ha, per la (3),

$$(5) \quad M_a = \frac{4}{3} \pi \varrho_v R^3 \Phi = M_v \Phi.$$

Cioè, occorre moltiplicare la massa vera per Φ , per avere la massa apparente. È facile di vedere che il limite, per $p=0$, ossia per un raggio della sfera piccolissimo, o per un coefficiente di smorzamento H nullo, è uguale ad 1, cioè

$$\lim_{p=0} \Phi = 1.$$

Nella fig. 1 si è costruita la curva Φ , che rappresenta il variare di questa funzione, i valori della quale sono riportati come ordinate; quelli di p sono ascisse. Quella curva parte dal valore 1, e poi, abbassandosi, diventa assintotica all'asse delle p .

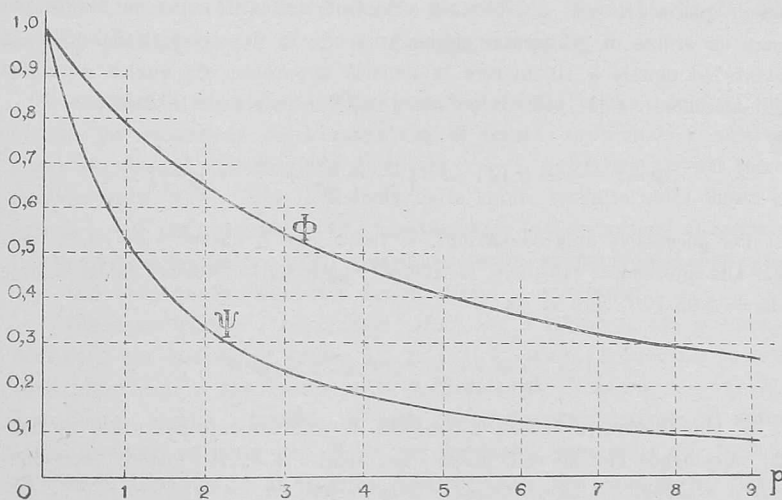


FIG. 1.

Introducendo il concetto di densità apparente ϑ_a , si ha evidentemente la relazione

$$(6) \quad M_a = \frac{4}{3} \pi \vartheta_a R^3.$$

Per cui, confrontando (5) con (6), si ha

$$(7) \quad \vartheta_v = \frac{\vartheta_a}{\Phi} ; \quad \vartheta_a = \vartheta_v \Phi ; \quad \Phi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v}.$$

Passiamo ora ad una applicazione di questo risultato. Come ho già detto, il caso della maggiore agglomerazione di materia, da noi ancora studiabile

è quello del sole. La ipotesi che il calore solare possa, in buona misura, essere generato da assorbimento gravitazionale, porterebbe alla necessaria conseguenza di una notevole apparente diminuzione della massa vera del sole, e quindi ad un valore di M_a sensibilmente diverso da M_v . Ora, il caso del sole è, come forse quello di qualsiasi altro corpo celeste, assai più complesso di quello trattato analiticamente, giacchè la densità di quell'astro deve certamente variare dal centro alla superficie. Già dissi che, secondo vari autori, può quella densità mutare all'incirca da 30 al centro a 0 alla superficie, con una densità media di 1,41; questa cifra rappresenterebbe, secondo l'attuale ipotesi dello smorzamento, la densità media apparente, mentre la densità vera potrebbe essere assai maggiore, ed in ogni caso minore di quella dei corpi più pesanti conosciuti (circa 25). Per cui, tanto per fissare un ordine di grandezza, supponiamo che la densità vera del sole sia costante ed uguale a 10, mentre la densità apparente sia quella ammessa dagli astronomi, cioè 1,41. Si ha per le (7) il valore della funzione Φ :

$$\Phi = \frac{1,41}{10} = 0,141 = 6 \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p} \right).$$

Per successive approssimazioni, si trova che il valore $p = 19,11$ soddisfa alla precedente relazione. Essendo il raggio della fotosfera solare uguale a $R_s = 6,95 \cdot 10^{10}$ cm., si ha:

$$H = \frac{p}{R} = \frac{19,11}{6,95} 10^{-10} = 2,7 \cdot 10^{-10}.$$

Si può introdurre ancora il concetto di smorzamento per unità di densità, supponendo che H vari proporzionalmente a $\mathcal{D}_v$. Il fattore corrispondente h sarebbe, nel caso numerico considerato ($\mathcal{D}_v = 10$),

$$h = \frac{H}{\mathcal{D}_v} = 2,7 \cdot 10^{-11}.$$

L'ipotesi $\mathcal{D}_v = 10$, se può avere un certo grado di probabilità, è del tutto arbitraria. Si possono dunque calcolare i valori di h , corrispondenti ad altri valori ipotetici della densità vera. Si ha, supponendo sempre costante la densità apparente $\mathcal{D}_a = 1,41$, la tabella seguente:

$\mathcal{D}_v$	= 1,41	2	5	10	15	20
$\Phi = \frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}_v}$	= 1	0,707	0,283	0,141	0,094	0,071
p	= 0	1,55	8,35	19,11	29,75	40,38
$h = \frac{p}{\mathcal{D}_v R_s}$	= 0	$1,11 \cdot 10^{-11}$	$2,40 \cdot 10^{-11}$	$2,75 \cdot 10^{-11}$	$2,85 \cdot 10^{-11}$	$2,90 \cdot 10^{-11}$

Così, per una variazione della densità vera da 2 a 20, il coefficiente di smorzamento h , rimane sempre dell'ordine di grandezza di circa 10^{-11} . Si vede dunque che basta supporre una densità vera del sole, anche di poco superiore all'apparente 1,41, perchè rimanga fissato l'ordine di grandezza della *costante universale di smorzamento* h . Questo risultato costituisce una guida sicura, in una ricerca sperimentale di controllo delle fatte ipotesi, come farò in seguito vedere.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie*. Nota II di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Facendo seguito alla Nota precedente dallo stesso titolo ⁽¹⁾, chiamiamo, per estensione della curvatura di Gauss, *invarianti e covarianti gaussiani* di una deformazione di specie $\nu - 1$ quelli trovati nel teorema fondamentale (n. 6), cioè il sistema delle spinte eseguite sulla forma simbolica L_ν (il cui quadrato serve a caratterizzare le deformazioni di specie ν) e l'insieme dei covarianti e degli invarianti ottenuti operando sulle spinte stesse.

Dal teorema fondamentale deriva subito il corollario:

Gli invarianti e i covarianti (simbolici o effettivi), che si ottengono operando sul sistema di forme $L_1, L_2, \dots, L_{\nu-1}$ e sui covarianti gaussiani, sono invarianti o covarianti nelle deformazioni di specie $\nu - 1$; il che è evidente, perchè i termini di essi che contengono derivate di ordine ν sono introdotti soltanto per effetto dei covarianti gaussiani, e i coefficienti di questi, appunto per il teorema fondamentale, non mutano per deformazioni di specie $\nu - 1$.

2. Per fare un'applicazione, cerchiamo gli invarianti in una deformazione di 2^a specie.

Si ha un solo covariante gaussiano (2^a spinta su L_3)

$$(L_{30} L_{12} - L_{21}^2) du_1^2 + (L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12}) du_1 du_2 + (L_{21} L_{03} - L_{12}^2) du_2^2;$$

quindi l'invariante gaussiano (relativo) (2^a spinta del precedente)

$$(L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12})^2 - 4(L_{30} L_{12} - L_{21}^2)(L_{21} L_{03} - L_{12}^2)$$

mentre dalle forme L_1^2 e L_2 si hanno gli invarianti relativi (comuni alle applicabilità)

$$EG - F^2, L_{20} L_{02} - L_{11}^2.$$

⁽¹⁾ Questi Rendiconti, fasc. prec. (2 novembre 1919).