ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Così, per una variazione della densità vera da 2 a 20, il coefficiente di smorzamento h, rimane sempre dell'ordine di grandezza di circa 10^{-11}. Si vede dunque che basta supporre una densità vera del sole, anche di poco superiore all'apparente 1,41, perchè rimanga fissato l'ordine di grandezza della *costante universale di smorzamento h*. Questo risultato costituisce una guida sicura, in una ricerca sperimenlale di controllo delle fatte ipotesi, come farò in seguito vedere.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota II di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Facendo seguito alla Nota precedente dallo stesso titolo [1], chiamiamo, per estensione della curvatura di Gauss, *invarianti e covarianti gaussiani* di una deformazione di specie $\nu - 1$ quelli trovati nel teorema fondamentale (n. 6), cioè il sistema delle spinte eseguite sulla forma simbolica L_ν (il cui quadrato serve a caratterizzare le deformazioni di specie ν) e l'insieme dei covarianti e degli invarianti ottenuti operando sulle spinte stesse.

Dal teorema fondamentale deriva subito il corollario:

Gli invarianti e i covarianti (simbolici o effettivi), che si ottengono operando sul sistema di forme $L_1, L_2, \ldots, L_{\nu-1}$ *e sui covarianti gaussiani, sono invarianti o covarianti nelle deformazioni di specie* $\nu - 1$; il che è evidente, perchè i termini di essi che contengono derivate di ordine ν sono introdotti soltanto per effetto dei covarianti gaussiani, e i coefficienti di questi, appunto per il teorema fondamentale, non mutano per deformazioni di specie $\nu - 1$.

2. Per fare un'applicazione, cerchiamo gli invarianti in una deformazione di 2^a specie.

Si ha un solo covariante gaussiano (2^a spinta su L_3)

$$(L_{30}\,L_{12} - L_{21}^2)\,du_1^2 + (L_{30}\,L_{03} - L_{21}\,L_{12})\,du_1\,du_2 + (L_{21}\,L_{03} - L_{12}^2)\,du_2^2\,;$$

quindi l'invariante gaussiano (relativo) (2^a spinta del precedente)

$$(L_{30}\,L_{03} - L_{21}\,L_{12})^2 - 4\,(L_{30}\,L_{12} - L_{21}^2)\,(L_{21}\,L_{03} - L_{12}^2)$$

mentre dalle forme L_1^2 e L_2 si hanno gli invarianti relativi (comuni alle applicabilità)

$$EG - F^2\ ,\ \ L_{20}\,L_{02} - L_{11}^2\,.$$

[1] Questi Rendiconti, fasc. prec. (2 novembre 1919).

Eseguendo poi le spinte fra il covariante gaussiano trovato e L_1^2 o L_2 (cioè, trattandosi qui di tre forme quadratiche, costruendo i loro invarianti simultanei), si hanno ancora gli invarianti relativi

$$EL_{02} - 2FL_{11} + GL_{20}$$

$$E(L_{21} L_{03} - L_{12}^2) - F(L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12}) + G(L_{30} L_{12} - L_{21}^2)$$

$$L_{20}(L_{21} L_{03} - L_{12}^2) - L_{11}(L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12}) + L_{02}(L_{30} L_{12} - L_{21}^2)$$

Il primo ed il terzo sono invarianti simbolici; se ne ottengono due effettivi facendo il quadrato di ciascuno di essi.

Dividendo i 6 invarianti ottenuti, ciascuno per una conveniente potenza di $EG - F^2$, si ottengono i *5 invarianti assoluti di una deformazione di 2ª specie* (¹).

Per le deformazioni di 3ª specie mi limito a formare le spinte eseguite sulla forma simbolica L_4 che sono (a meno di coefficienti numerici)

$$\begin{aligned} &(L_{40} L_{22} - L_{31}) du_1^4 + 2(L_{40} L_{13} - L_{31} L_{22}) du_1^3 du_2 + \\ &+ [(L_{40} L_{04} - L_{31} L_{13}) + 3(L_{31} L_{13} - L_{22}^2)] du_1^2 du_2^2 + \\ &+ 2(L_{31} L_{04} - L_{22} L_{13}) du_1 du_2^3 + (L_{22} L_{04} - L_{13}) du_2^4 \quad \text{(2ª spinta)} \\ &L_{40} L_{04} - L_{31} L_{13} - 3(L_{31} L_{13} - L_{22}^2) \qquad \text{(4ª spinta);} \end{aligned}$$

si sono raggruppati i termini in modo da mostrare la loro invarianza nelle deformazioni di 3ª specie. L'invariante assoluto che si deduce da quello relativo scritto è l'analogo della curvatura di Gauss; per avere quelli che si sono chiamati invarianti e covarianti gaussiani, bisogna ancora operare sulla 2ª spinta.

3. Qual'è il significato dell'annullarsi identico degli invarianti e covarianti gaussiani? A questa domanda (che estende alle deformazioni di specie qualsiasi la ricerca delle superficie a curvatura nulla per le applicabilità) risponde il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie sia applicabile di specie $\nu - 1$ sopra una superficie di un S_ρ, essendo

$$\varrho\left(\leq \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2}\right)$$

la dimensione degli $S(\nu - 1)$*-osculatori generici della superficie data, è*

(¹) Il prof. E. E. Levi, nella Memoria *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* [Ann. R. Scuola Norm. Pisa, vol. X], studiando le superficie rispetto al gruppo dei movimenti, aveva già trovato gli invarianti di 2° ordine di un tal gruppo (che sono appunto 5). Essi sono, come si vede subito, invarianti per deformazioni di 2ª specie. La loro forma differisce però dalla nostra contenendo soltanto derivate seconde; per l'introduzione delle derivate terze era necessario procurarsi l'estensione del teorema di Gauss.

che si annullino identicamente tutti i covarianti (*in particolare l'invariante se* $\nu - 1$ *è dispari*) *costruiti con le spinte eseguite sulla sola* L_ν.

Intanto è chiaro che per la superficie deformata, giacente in S_ρ, sono nulle tutte le matrici che figurano nei coefficienti di L_ν (qualunque sia il sistema di linee coordinate sulla superficie), quindi anche le differenze $L_{hk} L_{lm} - L_{h-1,k+1} L_{l+1,m-1}$: e poichè queste non variano per deformazioni di specie $\nu - 1$, devono esser nulle pure per la superficie data, e quindi sono nulle le spinte $\omega^r(L_\nu, L_\nu)$ (r pari e $\leq \nu$). Viceversa, se queste sono identicamente nulle, cioè se sono nulli i loro coefficienti, si annullano tutte le differenze scritte (formate con prodotti delle L_{hk}).

Basta osservare che tanto quelle differenze quanto quei coefficienti sono in numero di $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ e che, se una stessa differenza figura in due coefficienti diversi, vi è accompagnata da fattori numerici differenti (perchè dipendenti da r); e in conseguenza di ciò il sistema di equazioni, ottenuto uguagliando a zero quei coefficienti, risulta a determinante $\neq 0$ (¹).

Per $\nu = 2$ si hanno le superficie a curvatura nulla.

4. Il teorema precedente è affatto generale e nulla suppone sullo spazio d'immersione della superficie da deformare. Quando questo abbia dimensione $\varrho + 1$ ovvero $\varrho + 2$, si può caratterizzare facilmente la costruzione della superficie deformabile.

Cerchiamo le superficie di $S_{\rho+1}$ deformabili di specie $\nu - 1$ in una superficie di S_ρ [come prima, ϱ è la dimensione dello $S(\nu - 1)$ osculatore generico alla superficie]. Per effetto della dimensione ambiente (e non della deformabilità) la superficie possiede, in generale, ν sistemi semplicemente infiniti di curve dotate della seguente proprietà: lo S_ν osculatore ad una di esse in un suo punto è contenuto nello $S(\nu - 1)$ osculatore alla superficie nel punto (²). Può però accadere che questi ν sistemi vengano a coincidere in uno solo. Nel primo caso, assunte come linee coordinate sulla superficie quelle di due sistemi *distinti* fra i ν che possiede, le coordinate dei punti della superficie soddisfano a due equazioni a derivate parziali del tipo

$$\frac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^\nu} + \cdots = 0 \quad , \quad \frac{\partial^\nu x_i}{\partial u_2^\nu} + \cdots = 0$$

(¹) Il lettore può verificarlo per le deformazioni di 3ª specie sulle espressioni delle spinte di L_4 date al n. 2.

(²) L'angustia dello spazio non mi concede di estendermi nella dimostrazione di questo fatto proiettivo, nè di quelli che seguono. Per il lettore cui siano famigliari i metodi della geometria proiettivo-differenziale, essi non presentano difficoltà; in quest'ordine d'idee può vedersi la mia Nota *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* [Ist. Lombardo, Rendic., vol. XLVII, pag. 177] e due Note attualmente in corso di stampa negli stessi Rendiconti. Le curve qui indicate appartengono alla famiglia delle *quasi-asintotiche*.

ove i punti stanno ad indicare termini lineari nelle derivate parziali linearmente indipendenti d'ordine $\leq \nu - 1$ (i coefficienti, funzioni di u_1, u_2, non dipendono dall'indice i della coordinata x_i). Con questa scelta risultano nulli tutti i determinanti estratti dalle matrici $L_{\nu 0}$, $L_{0\nu}$ (il che indicheremo brevemente scrivendo $L_{\nu 0} = L_{0\nu} = 0$) e quindi sono nulli tutti i prodotti nei quali entri $L_{\nu 0}$ o $L_{0\nu}$.

Notiamo ancora che, se la superficie data non sta in S_ρ (nel qual caso il problema posto non esiste), uno almeno dei punti derivati d'ordine del punto x, esclusi $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^\nu}$ e $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_2^\nu}$, è fuori dello $S(\nu - 1)$-osculatore in x; sia per es. $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2}$. Allora, per essere la superficie in $S_{\rho+1}$, dovranno ancora esser soddisfatte dai suoi punti equazioni lineari a derivate parziali del tipo

$$\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^h \partial u_2^k} = \alpha_{hk} \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2} + \cdots \qquad (h + k = \nu)$$

(esclusi per h i valori 0, $\nu - 1$ e ν; e per k i valori 0, 1 e ν). I punti hanno lo stesso significato di prima; non è escluso che alcune (anche tutte le) α_{hk} siano nulle. Segue intanto di qua che $L_{hk} L_{lm} = \alpha_{hk} \alpha_{lm} L^2_{\nu-1,1}$; quindi, se è nullo $L^2_{\nu-1,1}$, sono nulli gli invarianti e covarianti gaussiani. Ma dall'annullarsi di $L_{\nu 0} L_{\nu-2,2} - L^2_{\nu-1,1} \equiv - L^2_{\nu-1,1}$ segue appunto $L^2_{\nu-1,1} = 0$: cioè, nel campo reale, che il punto $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2}$, e perciò tutta la superficie, contro l'ipotesi, sta in S_ρ.

Rimane dunque da vedere se esistano superficie della specie voluta fra quelle sulle quali tutti i sistemi di quasi-asintotiche considerate coincidono. In tal caso, assunto questo come sistema u_1 (cioè $u_2 = \text{cost.}$), debbono valere le equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee

$$\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^\nu} + \cdots = 0 \;, \quad \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2} + \cdots = 0 \;, \quad \ldots \;, \quad \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1 \, \partial u_2^{\nu-1}} + \cdots = 0 \;;$$

quindi sono nulle (indipendentemente dalle condizioni di deformabilità) tutte le $L_{h,k}$, eccetto $L^2_{0\nu}$. Ma siccome $L^2_{0\nu}$ non può entrare nelle differenze del tipo $L_{hk} L_{lm} - L_{h-1,k+1} L_{l+1,m-1}$, queste sono tutte nulle; quindi ogni superficie di questo tipo soddisfa effettivamente al nostro problema.

L'interpretazione geometrica delle equazioni precedenti (sulla quale non sto a fermarmi) porta al risultato seguente:

Le sole superficie di $S_{\rho+1}$ *applicabili di specie* $\nu - 1$ *sopra una superficie di* S_ρ, *essendo* ρ *la dimensione dello spazio* $S(\nu - 1)$*-osculatore generico, sono quelle contenenti curve negli* $S_{\rho-\nu+1}$ *osculatori ad una curva.*

È poi chiaro che nella deformazione si conservano rigidi gli S_ρ osculatori alla curva ora nominata, e che la voluta deformazione si conseguisce appunto mediante rotazioni infinitesime di questi S_ρ intorno agli $S_{\rho-1}$ osculatori. (Per $\varrho = \nu = 2$ si hanno le superficie di S_3 applicabili sul piano).

5. Cerchiamo ora le superficie di $S_{\rho+2}$ deformabili di specie $\nu - 1$ in superficie di $S_\rho \equiv S(\nu - 1)$-osculatore.

Bisogna anche qui, come nel caso precedente, distinguere le proprietà proiettive della superficie risultanti dalla dimensione ambiente $(\varrho + 2)$, dalle proprietà (proiettive e metriche) dipendenti dalle condizioni di deformabilità. Si trova così che le superficie in esame posseggono un doppio sistema di curve (permanente nella deformazione) dotato delle seguenti proprietà:

Gli S_h $(1 \leq h \leq \nu - 1)$*-osculatori alle curve di un sistema in* $\nu - h + 1$ *punti successivi di una curva dell'altro stanno in uno* $S(\nu - 1)$*-osculatore alla superficie.*

L'unica condizione, per la voluta deformabilità, che rimane ancora da considerare, è $L_{\nu 0} L_{0\nu} - L_{\nu-1,1} L_{1,\nu-1} = 0$; quindi, per le precedenti,

$$L_{\nu 0} L_{0\nu} = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di $S_{\rho+2}$ *sia deformabile di specie* $\nu - 1$ *in una superficie di* S_ρ, *essendo* ϱ *la dimensione dello* $S(\nu - 1)$*-osculatore generico alla superficie, è che (quando non appartenga al tipo già determinato nel n.* 4) *possegga un doppio sistema del tipo sopra specificato e che in ogni punto gli* $S_{\rho+1}$, *che dallo* S_ρ *ivi osculatore alla superficie proiettano gli* S_ν *ivi osculatori alle due curve del sistema che vi passano, siano fra loro ortogonali.*

Anche nel caso delle applicabilità $(\varrho = \nu = 2)$ si ha un risultato che credo nuovo: le superficie di S_4 applicabili sul piano, quando non siano sviluppabili, posseggono un doppio sistema coniugato (ordinario) tale che gli S_3, che dal piano tangente in un punto alla superficie proiettano i piani osculatori alle due curve del sistema che vi passano, sono fra loro ortogonali. L'esempio portato dal Killing (¹) soddisfa appunto a questa condizione.

(¹) Killing, *Die Nichteuklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung* [Leipzig, Teubner, 1885], § 12, pag. 241.