ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Sulle curve piane algebriche reali prive di punti reali.* Nota di LUIGI BRUSOTTI, presentata dal Corrisp. L. BERZOLARI.

1. Una curva piana algebrica reale, cioè avente equazione a coefficienti reali rispetto ad elementi reali di riferimento, quando sia d'ordine pari $2m$, può essere priva di punti reali.

D'altro lato, se si osserva che le parti reali delle curve reali di un fascio reale di curve piane algebriche costituiscono un *fascio di curve grafiche* (1) e che un fascio di curve grafiche può essere o *rientrante in sè* o *dotato di estremi* (2), appare ben lecito di applicare queste denominazioni direttamente al fascio reale di curve algebriche.

Ciò posto, risulta in modo semplice che, *se un fascio reale di curve piane algebriche contiene una curva reale priva di punti reali, esso è dotato di estremi.* Precisamente le sue curve reali si ripartiscono in due continui, l'uno di curve dotate di punti reali, l'altro di curve prive di punti reali, continui separati dai due *estremi*, per ciascuno dei quali la parte reale è, in generale, ridotta ad un sol punto isolato.

Per i fasci *topologicamente generici* (3) è pur valida la reciproca.

2. Segue che, *se le curve piane d'ordine* $2m$ *si rappresentano coi punti di uno spazio* S_r *ad* $r = m\,(2m+3)$ *dimensioni, in modo che immagini di curve reali siano punti reali, i punti-immagine di curve reali prive di punti reali riempiono una regione* K, *ad* r *dimensioni, convessa (od ovoide), quindi semplicemente connessa.*

Ed invero una retta reale di S_r, la quale passi per un punto di K, è immagine di un fascio dotato di estremi ed ha perciò in comune con K un solo segmento, immagine del continuo costituito entro il fascio dalle curve reali prive di punti reali.

Risulta pure che *un punto generico del contorno di* K *è immagine di una curva la cui parte reale si riduce ad un punto isolato.*

Se inoltre si pon mente agli spazî reali subordinati ad S_r, si deduce che, *se le curve di un sistema lineare reale* ∞^t $(t < r)$ *si rappresentano*

(1) Brusotti, *Sui fasci di curve grafiche* (Succ. Bruni. Pavia, 1919). Cfr. n. 34.

(2) Ibid., § 8 e § 9.

(3) Per la definizione di fascio topologicamente generico vedasi ibid., n. 117; ed anche Brusotti, *Un teorema sui fasci reali di curve algebriche* (in questo volume di Rendiconti)

coi punti di un S_t *reale in modo che immagini di curve reali siano punti reali, e se il sistema contiene curve reali prive di punti reali, i punti-immagine di queste ultime riempiono una regione a t dimensioni, convessa (quindi semplicemente connessa).*

3. Con queste premesse si può dimostrare che, *se esiste un fascio reale (topologicamente generico) di curve piane di ordine* $2m$, *contenente curve reali prive di punti reali e dotato di* $2h+1$ *centri critici reali* (1), *allora, comunque si scelga il numero positivo* $h' \leq h$, *esistono pure fasci reali di ordine* $2m$, *contenenti curve reali prive di punti reali e dotati di* $2h'+1$ *centri critici reali.*

Sia φ il fascio del tipo detto e dotato di $2h+1$ centri critici reali; sia φ_1 un fascio pure del tipo detto, ma dotato di 3 centri critici reali, fascio di cui è nota l'esistenza (2).

Supposti, come è lecito, φ e φ_1 in condizioni algebricamente generiche, essi appartengono ad un ∞^3 reale ed algebricamente generico, rappresentabile nel modo indicato (n. 2) su di un S_3 reale.

Siano allora (φ) (φ_1) le rette (reali) immagini dei due fasci, e sia H la regione convessa luogo delle immagini delle curve reali prive di punti reali. In H, e rispettivamente su (φ) (φ_1), si prendano due punti P e P_1 e si consideri una retta reale, la quale passi con continuità (in S_3) dalla posizione (φ) alla (φ_1), sempre appoggiandosi ad una linea congiungente P con P_1 e totalmente tracciata in H [il che è possibile, per esser H (n. 2) semplicemente connessa].

Si osservi che in S_3 le curve dotate di punto doppio sono rappresentate dai punti di una superficie Δ, la cui parte reale si compone:

α) di una falda reale, con linee nodali e cuspidali rispondenti all'esistenza, nel sistema, di curve (reali) dotate di due punti doppî reali o di cuspide reale;

β) di linee doppie isolate, per l'esistenza di curve (reali) dotate di due punti doppî immaginario-coniugati.

Punti eccezionali in numero finito spettano alla parte reale di Δ per la presenza, nel sistema, di curve reali con tre punti doppî o con tacnodo o con due punti doppî di cui uno sia una cuspide.

Per l'arbitrarietà del procedimento, si può supporre che la retta mobile, passando dalla posizione (φ) alla (φ_1), eviti codesti punti eccezionali. Così è da escludersi che la retta venga a toccare la falda reale di Δ, perchè

(1) Centro critico è (secondo Cayley) un punto doppio per una ed una sola curva del fascio. Se l'ordine è pari, il numero dei centri critici reali (come quello totale dei centri critici) è dispari.

(2) Brusotti, *Esistono fasci di curve piane d'ordine n a punti-base e centri critici tutti reali* (Rend R. Ist. Lomb., vol. LI, 1918). Vedasi la postilla alla prefazione.

in tal caso il fascio di cui la retta è immagine acquisterebbe punti-base reali [1], mentre esso possiede curve reali prive di punti reali in quanto la retta costantemente penetra in H.

Non avendo le linee isolate di Δ influenza alcuna sulle caratteristiche topologiche del fascio variabile insieme colla retta, queste muteranno solo nel caso che la retta stessa attraversi linee nodali o cuspidali per la falda reale di Δ. Ma la prima circostanza non altera il numero dei centri critici reali, mentre la seconda lo altera di due unità, perchè il fascio (attraverso ad un fascio dotato di curva cuspidata) acquista o perde una coppia di centri critici reali (l'uno nodale, l'altro isolato) [2].

Segue che, nella deformazione continua corrispondente allo spostamento della retta, immagine, il fascio si conserva dotato di curve reali prive di punti reali, ma il numero dei centri critici reali assume almeno una volta ciascuno dei valori dispari compresi fra $2h+1$ e 3. Ed il teorema è così dimostrato.

4. Un risultato generale sui *modelli algebrici* dei fasci di curve grafiche [3] permette di estendere il teorema del n. 3 nel modo seguente:

Se esiste un fascio reale (topologicamente generico) di curve piane d'ordine $2m$, contenente curve reali prive di punti reali e dotato di $2h+1$ centri critici reali, comunque si scelgano i numeri (positivi)

$$m' \geq m \ , \ h' \leq h,$$

esistono fasci reali algebricamente generici di curve piane d'ordine $2m'$, i quali contengono curve reali prive di punti reali e posseggono $2h'+1$ centri critici reali.

(1) La rete delle curve del sistema passanti per un punto reale M ha per immagine il piano tangente alla falda reale di Δ nel punto-immagine della curva del sistema avente punto doppio in M.

(2) Cfr. *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), n. 83 (fig. 55).

(3) *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), nn. 117-118.