ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme*. Nota III di B. Caldonazzo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

8. Solo dopo la pubblicazione delle mie due Note *Sul moto di un vortice puntiforme* (¹) sono venuto a conoscenza di alcuni lavori sullo stessso argomento.

Il sig. L. Föppl ha studiato (²) il moto di una coppia di vortici in presenza di un cilindro circolare. È questo il caso che io considero in fine alla Nota II; i risultati che riportai allora contengono in sostanza quelli del Föppl. Dal lavoro del Föppl apprendo inoltre che W. Kutta già da parecchio tempo aveva trattato il caso di una coppia di vortici in presenza di una lamina rettilinea, cui pure io accenno alla fine della Nota II, dando gli elementi essenziali per la determinazione del moto della coppia. Non sono riuscito tuttavia a prendere visione del lavoro del Kutta.

Affrettandomi a restituire la dovuta priorità, mi permetto di rilevare che i sigg. Kutta e Föppl si sono limitati a problemi particolari, mentre nel mio lavoro la parte rigida limitante il campo del moto ha forma qualsiasi. Mi sembra inoltre un vantaggio non trascurabile l'introduzione della corrente C (vedi le due prime Note) che permette di dare ai risultati una forma semplice ed espressiva.

Più recente è un lavoro del sig. Lagally (³). Egli rileva con quali cautele si possa impiegare la rappresentazione conforme del campo del moto, quando in questo esistano dei vortici isolati, per la ragione che la funzione di corrente è singolare nei punti occupati dai vortici. Mi sia permesso di notare che ciò è sostanzialmente contenuto in un lavoro del Routh (⁴) e del quale ho tenuto conto e mi sono utilmente giovato nelle due Note citate.

Il Lagally considera quindi il moto di un vortice in un canale a pareti rettilinee per passare poi, con la rappresentazione conforme, ad un piano tagliato da una semiretta, considerato quale superficie riemanniana a due fogli.

(¹) In questi Rend., vol. XXVIII, pagg. 191-195 e pagg. 301-303.

(²) L. Föppl, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder* [Sitzungsber. der Kön. Bayerischen Akad. der Wiss. math.-physik. Klasse (1913) Münken].

(³) M. Lagally, *Ueber die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit* [Sitzungsber. der Kön. Bayerischen Akad. der Wiss. math.-physik. Klasse (1915) München].

(⁴) E. J. Routh, *Some applications of coniugate functios* [Proc. Lond. math. Soc., 12 (1881), pag. 72].

Mentre i lavori del Föppl e del Kutta mi esimono, pel momento, dal trattare diffusamente i casi interessanti di una coppia di vortici in presenza di un cilindro o di una lamina, come mi ero proposto di fare, il lavoro del Lagally mi ha indotto a pubblicare questa terza Nota *sul moto di un vortice puntiforme in un canale a pareti qualisivogliano e percorso da una corrente* C *stazionaria irrotazionale.*

Seguendo il criterio, introdotto utilmente nelle prime due Note, posso esprimere ancor qui tutti gli elementi del moto del vortice per mezzo di quelli di C, determinandone i punti d'arresto e la condizione per la loro stabilità.

Pertanto, anche per un canale il moto di un vortice si può considerare determinato in tutti quei casi in cui sia stata determinata una qualsiasi corrente C stazionaria irrotazionale.

Sussistono ancora i risultati qualitativi, già rilevati nelle Note precedenti. In particolare risulta giustificato quanto si osserva nel caso reale, e cioè che i vortici si presentano di preferenza, sostandovi, in prossimità delle sporgenze e delle rientranze delle sponde.

Faccio infine un'applicazione ad un caso particolare che permette di considerare il moto di una coppia di vortici in un canale, che si può risguardare costituito da un recipiente molto grande munito di imboccatura di Borda. Il luogo dei possibili punti d'arresto della coppia è interno al tubo costituente l'imboccatura e coincide con le linee isotachie della vena libera effluente nel caso di Borda.

9. Siano μ e ν le due pareti del canale, le quali si estendono indefinitamente a monte ed a valle. Con μ si conviene indicare quella parete che risulta parete *destra* per una corrente C a portata q *positiva.* Il sistema di riferimento e le notazioni sono quelli già introdotti al n. 1.

Perciò, se $f = \varphi + i\psi$ è il potenziale complesso del moto di C, possiamo fissarne una determinazione, in guisa che risulti $\psi = 0$ su μ, $\psi = q$ su ν, qualunque sia il segno della portata q. Si ponga ora

$$Z = e^{\frac{\pi}{q}f} = e^{\frac{\pi}{q}\varphi}\left(\cos\frac{\pi}{q}\psi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{q}\psi\right).$$

La nuova variabile complessa $Z = X + iY$ rappresenta manifestamente in modo conforme il campo A del moto sul semipiano $Y \geq 0$. Sostituendo nella (1) il 2° membro di questa, a meno di una inessenziale costante additiva, diviene

$$\frac{I}{2\pi}\log\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{q}\psi}{V}.$$

Perciò la funzione di corrente del moto del vortice, *composto* del moto della corrente C e di quello proprio del vortice stesso, risulta

$$\psi^* = \frac{\mathrm{I}}{2\pi} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi}{\mathrm{V}} \psi \,,$$

che differisce dalla ψ^* della Nota II, relativa al caso in cui una delle pareti del canale è a distanza infinita, per lo scambio di ψ in $\operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi$ nell'argomento del log. Sono quindi traiettorie del vortice le linee

$$\mathrm{V} = a\, e^{\frac{2\pi}{\mathrm{I}}\psi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi \,, \qquad a = \text{cost.}$$

La sua velocità $\mathbf{V}^*$ è data da

$$\mathbf{V}^* = \left(\frac{\mathrm{I}}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1\right) \mathbf{V} - \frac{\mathrm{I}}{2\pi} \operatorname{grad} \vartheta \,,$$

che si può scrivere

$$\mathbf{V}^* = \left\{ \left(\frac{\mathrm{I}}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1\right) \mathrm{V} - \frac{\mathrm{I}}{2\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right\} \mathbf{t} + \frac{\mathrm{I}}{2\pi} \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} \,,$$

$\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ rappresentando sempre i vettori unitarî tangente e normale alla vevelocità $\mathbf{V}$ della corrente C.

I punti d'arresto del vortice evidentemente sono quelli in cui

$$\left(\frac{\mathrm{I}}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1\right) \mathrm{V} = \frac{\mathrm{I}}{2\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \;, \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \,.$$

La seconda di queste coincide con la relazione già trovata pel caso studiato nelle Note precedenti. Ancor qui essa individua una linea l, di cui fa parte il luogo dei punti dove la velocità V di C ha un massimo od un minimo e sulla quale necessariamente si trovano i punti di arresto.

Per la *stabilità* dell'arresto, seguendo lo stesso procedimento del n. 4, si ritrova la condizione

$$\mathrm{I} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} > 0 \,.$$

Ancor qui tutti gli eventuali punti angolari delle pareti appartengono alla linea l, per le stesse ragioni addotte nella Nota II. Ciò mette in evidenza la possibilità che il vortice si presenti e sosti nelle vicinanze delle accidentalità delle sponde, come ho asserito nel n. precedente.

10. In alcuni casi, non del tutto infrequenti, giova definire la corrente C, anzichè con una funzione $f(z)$ della variabile complessa del campo del moto, con una relazione tra w ed f. Risulta allora $V = V(\varphi, \psi)$; e per conseguenza, ricordando che lungo una linea di flusso s di C è $\psi = cost.$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial \tau}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} = V\frac{\partial \tau}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\,\partial \psi}.$$

La linea l risulta così definita dall'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

e la condizione di stabilità si modifica nella seguente:

$$I\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\,\partial \psi} > 0.$$

Ad es., per $z = f + e^f + 1$ si ha $w = (1 + e^f)^{-1}$ [1]. Si tratta di un canale la cui parete μ è l'asse delle x, la parete ν è costituita dai due bordi del taglio fatto con la semiretta $y = \pi$, $x \leq 0$. La corrente C sbocca dalla striscia compresa tra le due pareti nel restante semipiano $y \geq 0$.

Si ha in questo caso

$$V = (1 + e^{2\varphi} + 2e^{\varphi}\cos\psi)^{-\frac{1}{2}};$$

quindi se ne deriva

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\,V^3 e^{\varphi}(e^{\varphi} + \cos\psi).$$

Questa mostra che la linea l è costituita dalle due sezioni normali alla vena C all' ∞ a monte ed a valle e dalla linea $e^{\varphi} + \cos\psi = 0$, avente per assintoto la retta $y = \frac{\pi}{2}$. Su questa linea è

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi\,\partial \psi} = V^3 e^{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\psi = -\,\frac{\cos\psi}{\mathrm{sen}^2\,\psi}.$$

Ne segue (poichè nell'interno del campo è $0 < \psi < \pi$) che per la stabilità dell'arresto su questa linea il vortice deve avere intensità positiva e

[1] Helmholtz [Berl. Monatsber., 23 aprile 1868; opppure Ges. Abh, I. p. 154].

che l'arresto avviene nel punto I $\cot g\,\psi + \pi = 0$. Invertendo la corrente C (cambia quindi il segno di ψ), la linea l non muta; soltanto per la stabilità deve essere allora $I < 0$.

Con una riflessione del campo del moto rispetto alla parete μ si ha un canale con una coppia di vortici, il canale così ottenuto potendosi risguardare nella porzione di larghezza finita quale tubo d'imboccatura di Borda, applicato al recipiente costituito dal rimanente canale, che col tubo considerato ricopre l'intero piano. Particolare degno di nota: la linea l coincide con la linea isotachia della vena libera effluente nel caso di Borda [1].

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota III di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [2].

Volendo determinare il vettore Ω', possono servire le equazioni

$$S' = \alpha g \times \Omega' = 0 \;;\; \alpha\Omega \times \Omega' = T' \;;\; K\gamma g \times \Omega' = 0 \tag{12}$$

dalle quali si ricava la relazione

$$\alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \,.\, \Omega' = T' \,.\, K\gamma g \wedge \alpha g \tag{13}$$

che permette di determinare Ω' purchè sia soddisfatta la condizione

$$\alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \neq 0 \,. \tag{14}$$

Per dimostrare che questo prodotto misto non è in generale nullo, basta verificare che non è nullo in qualche caso particolare.

Consideriamo, ad esempio, i giroscopi asimmetrici assiali, per i quali sia $g = \mathbf{i}$ ove $\mathbf{i}$ è uno dei vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia del sistema relativi al punto fisso O. Indicando rispettivamente con A, B, C e con p, q, r i momenti principali d'inerzia e le componenti del vettore Ω rispetto ai detti assi, si hanno le relazioni

$$\alpha g = \alpha \mathbf{i} = A\mathbf{i} \;;\; \alpha\Omega = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k} \;;$$
$$K\gamma \mathbf{i} \equiv \mathbf{i} \wedge \alpha\Omega + \alpha \,.\, \Omega \wedge \mathbf{i} = (B - C)(r\mathbf{j} + q\mathbf{k})$$

(1) Le equazioni parametriche di l sono:

$$x = \log(-\cos\psi) + \operatorname{sen}^2\psi \,;\; y = \psi - \operatorname{sen}\psi\cos\psi \,.$$

Si faccia in queste $\psi = \pi - \theta/2$, scambiando quindi y in $\pi - y$. Si ottengono così le equazioni della linea isotachia riportate dal Lamb [*Hydrodyn.* traduz. del Friedel (1907), pag. 112, formule (6)].

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° giugno 1919.