ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

che l'arresto avviene nel punto I $\cot g\, \psi + \pi = 0$. Invertendo la corrente C (cambia quindi il segno di ψ), la linea l non muta; soltanto per la stabilità deve essere allora $I < 0$.

Con una riflessione del campo del moto rispetto alla parete μ si ha un canale con una coppia di vortici, il canale così ottenuto potendosi risguardare nella porzione di larghezza finita quale tubo d'imboccatura di Borda, applicato al recipiente costituito dal rimanente canale, che col tubo considerato ricopre l'intero piano. Particolare degno di nota: la linea l coincide con la linea isotachia della vena libera effluente nel caso di Borda [1].

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota III di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [2].

Volendo determinare il vettore Ω', possono servire le equazioni

$$\text{(12)} \qquad S' = \alpha g \times \Omega' = 0 \;;\; \alpha\Omega \times \Omega' = T' \;;\; K\gamma g \times \Omega' = 0$$

dalle quali si ricava la relazione

$$\text{(13)} \qquad \alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \,.\, \Omega' = T' \,.\, K\gamma g \wedge \alpha g$$

che permette di determinare Ω' purchè sia soddisfatta la condizione

$$\text{(14)} \qquad \alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \neq 0 \,.$$

Per dimostrare che questo prodotto misto non è in generale nullo, basta verificare che non è nullo in qualche caso particolare.

Consideriamo, ad esempio, i giroscopi asimmetrici assiali, per i quali sia $g = \mathbf{i}$ ove $\mathbf{i}$ è uno dei vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia del sistema relativi al punto fisso O. Indicando rispettivamente con A, B, C e con p, q, r i momenti principali d'inerzia e le componenti del vettore Ω rispetto ai detti assi, si hanno le relazioni

$$\alpha g = \alpha\mathbf{i} = A\mathbf{i} \;;\; \alpha\Omega = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k} \;;$$
$$K\gamma\mathbf{i} \equiv \mathbf{i} \wedge \alpha\Omega + \alpha \,.\, \Omega \wedge \mathbf{i} = (B - C)(r\mathbf{j} + q\mathbf{k})$$

[1] Le equazioni parametriche di l sono:

$$x = \log(-\cos\psi) + \operatorname{sen}^2\psi \,;\, y = \psi - \operatorname{sen}\psi\cos\psi \,.$$

Si faccia in queste $\psi = \pi - \theta/2$, scambiando quindi y in $\pi - y$. Si ottengono così le equazioni della linea isotachia riportate dal Lamb [*Hydrodyn.* traduz. del Friedel (1907), pag. 112, formule (6)].

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° giugno 1919.

e quindi la (14) porge

$$(15)\qquad \alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g = A i \times \alpha\Omega \wedge K\gamma i = A(B - C)(Bq^2 - Cr^2)$$

e da qui si vede che per $A \neq B \neq C$ (giroscopio asimmetrico) il prodotto (14) è diverso da zero. Quindi si può dire che « *per i giroscopi asimmetrici* « *in generale sussiste la condizione* (14) *e quindi si può adoperare la* (13) « *per la determinazione del vettore* Ω' ».

È evidente che quando il giroscopio è simmetrico, poichè risultano eguali fra loro almeno due dei momenti principali d'inerzia, la (15), e quindi anche la (14), si annulla e la (13) non serve più per la determinazione di Ω'.

Un procedimento analogo può essere adoperato per dimostrare che, per i giroscopi asimmetrici *in generale*, l'equazione suppletiva (11), che è una relazione algebrica fra T e U, non è conseguenza delle equazioni di Schiff. Osservando poi che esistono fra T e U due relazioni algebriche e indipendenti fra loro, si deduce che, « *per i giroscopi asimmetrici in generale e* « *per* $S =$ *costante, anche gl'invarianti* T *e* U *risultano costanti e i moti* « *del giroscopio sono rotazioni permanenti* ».

Su questo argomento Hess [1] trovò che, « anche in giroscopi asimmetrici particolari e in particolari condizioni di moto, solo l'ipotesi $S_0 = 0$ « può condurre a moti che non siano rotazioni permanenti ».

Da questo teorema e da quanto è stato detto precedentemente segue che, « nei giroscopi asimmetrici e nell'ipotesi che sia $S_0 \neq 0$, le due dette « relazioni algebriche frà T e U [cioè la (11) è quella che si ricava « dalle (A)] devono risultare sempre fra loro indipendenti per valori qua- « lunque delle costanti h, k, S_0 ».

Per dimostrare questo teorema, che lo Stäckel non riuscì a provare, si può procedere nel seguente modo:

Dalle tre prime equazioni (A) si deduce col solito procedimento la relazione

$$\Omega \times \alpha\Omega \wedge g \,.\, \alpha\Omega = 2T \,.\, \alpha\Omega \wedge g + 2U \,.\, g \wedge \Omega + S_0 \,.\, \Omega \wedge \alpha\Omega$$

che per la quarta delle (A) può scriversi

$$(16)\qquad 2 \,.\, \alpha\Omega \wedge g \,.\, T + 2g \wedge \Omega \,.\, U = \alpha\Omega \wedge \Omega \,.\, S_0 ,$$

e questa è una delle due relazioni fra T e U da considerare; l'altra è la (11) che conviene scrivere nel seguente modo:

$$(17)\qquad - S_0 \,.\, T + 2g \times \Omega \,.\, U = hS_0 - kg^2 + \alpha\Omega \times g \wedge \alpha\Omega' .$$

Ora, perchè queste due relazioni algebriche e lineari fra T e U siano indipendenti fra loro, è necessario e basta che sia diverso da zero il deter-

(1) Hess, *Bamberger Programm*, § 12, S. 31-40.

minante dei coefficienti di T e di U, che cioè non sia nullo il vettore

$$\mathbf{d} = 4\mathrm{g} \times \Omega \, . \, \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} + 2\mathrm{S}_0 \, . \, \mathrm{g} \wedge \Omega \, . \tag{18}$$

Dopo ciò la dimostrazione del teorema si riduce a provare che, fatta eccezione del valore $\mathrm{S}_0 = 0$, comunque si scelgano le costanti h, k, S_0, il vettore $\mathbf{d}$ risulta sempre diverso da zero per i giroscopi asimmetrici.

Poichè h e k non figurano nella (18), $\mathbf{d}$ non dipende da queste costanti; quanto ad S_0 si osserva che, per $\mathrm{S}_0 \neq 0$, $\mathbf{d}$ può annullarsi solo quando sia identicamente soddisfatta la relazione

$$2\mathrm{g} \times \Omega \, . \, \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = \mathrm{S}_0 \, . \, \Omega \wedge \mathrm{g} \tag{19}$$

e questa sussiste evidentemente solo nelle seguenti ipotesi:

$$\mathrm{g} \times \Omega = 0 \quad , \quad \Omega \wedge \mathrm{g} = 0 \tag{20}$$

$$\alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = 0 \quad , \quad \Omega \wedge \mathrm{g} = 0 \tag{21}$$

$$(\alpha\Omega \wedge \mathrm{g}) \wedge (\Omega \wedge \mathrm{g}) = 0 \, . \tag{22}$$

Ora, fatta esclusione dei casi in cui sia nullo o il vettore g (caso di Poisson) o il vettore Ω (caso del riposo), è evidente che le condizioni (20) sono tra loro incompatibili e che le (21) e la (22) possono sussistere solo nel caso in cui l'omografia α d'inerzia si riduca ad un numero, cioè solo nel caso in cui il giroscopio sia simmetrico. Si può dunque concludere che « *nel caso dei giroscopi asimmetrici, per S costante ma diverso da zero,* « *le relazioni* (16) *e* (17) *fra T e U risultano sempre fra loro indipen-* « *denti, comunque si scelgano le costanti* h, k, S_0 ».

Da ciò segue che « *anche nei giroscopi asimmetrici particolari e per* « *particolari condizioni di moto, con l'ipotesi* $S_0 \neq 0$ *solo le rotazioni* « *permanenti sono compatibili* ».

Passando ora all'esame del caso escluso $S_0 = 0$, si osserva che in tale ipotesi la (19) dà

$$\mathrm{g} \times \Omega \, . \, \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = 0 \tag{19'}$$

e, poichè l'annullarsi del 2° fattore è incompatibile con l'ipotesi $\mathrm{S}_0 = \alpha\Omega \times \mathrm{g} = 0$, si conclude che l'unico caso in cui il vettore $\mathbf{d}$ si annulla è caratterizzato dalla condizione

$$\mathrm{g} \times \Omega = 0 \, . \tag{23}$$

Supposto quindi $\mathrm{g} \neq 0$, $\Omega \neq 0$, si ha questo nuovo risultato che « *nei* « *giroscopi asimmetrici, per* $S_0 = 0$, *sono possibili delle rotazioni non* « *permanenti solo quando l'asse istantaneo di rotazione risulti perpendi-* « *colare alla retta che congiunge il punto fisso col baricentro del giro-* « *scopio* ».

Poichè tale retta è fissa nel corpo, l'asse istantaneo di rotazione potrà muoversi in un piano, anche fisso nel corpo, normale a g e passante per il punto fisso O. Inoltre, dalla condizione $S_0 = \alpha\Omega \times g = 0$ risulta che anche il vettore $\alpha\Omega$ dell'impulso dovrà mantenersi, durante il moto, parallelo al detto piano; e quindi, posto $P = O + \Omega$, $P_1 = O + \alpha\Omega$, si conclude che « *quando in un giroscopio asimmetrico, per cui si abbia* $S_0 = 0$, « *le rotazioni non sono permanenti, la polodia* (luogo dei punti P) *e la* « *prima curva d'impulso* (luogo dei punti P_1) *sono curve piane e giac-* « *ciono nel piano, passante per il punto fisso, che è normale alla retta* « *che congiunge questo punto col baricentro del giroscopio* ».

4. Studio del caso in cui il piano $S = S_0$ è un elemento del cono di Staude. — In questo caso le due ultime equazioni (A) non sono fra loro indipendenti e il cono degli assi permanenti di rotazione deve necessariamente spezzarsi in due piani.

Cominciamo con l'osservare che quando il giroscopio è simmetrico rispetto ad un asse, ad es. $O\mathbf{s}$, l'equazione del cono assume la forma

$$\alpha\Omega \times \mathbf{s} \, . \, g \times \mathbf{s} \wedge \Omega = 0 \tag{24}$$

ed è chiaro che, supposto sempre $g \neq 0$, $\Omega \neq 0$, questa equazione è soddisfatta solo quando si annulla uno dei due fattori, cioè quando il vettore dell'impulso risulta normale all'asse di simmetria, oppure quando l'asse istantaneo di rotazione risulta complanare coll'asse di simmetria e col vettore g del baricentro. Se poi il giroscopio è simmetrico rispetto al punto fisso, allora, poichè l'omografia α è un numero, la (24) risulta soddisfatta identicamente, cioè ogni retta passante per il punto fisso può essere un asse permanente di rotazione. Ma se il giroscopio è asimmetrico, la (24) non è più una identità e quindi la degenerazione del cono non può aver luogo che in casi particolari.

Considerando una terna di vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O e indicando con A, B, C i corrispondenti momenti d'inerzia e rispettivamente con $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ le componenti, rispetto ai detti assi, dei vettori Ω e $\mathbf{g}$, le due ultime equazioni (A) assumono rispettivamente la forma

$$A\xi p + B\eta q + C\zeta r = S_0, \tag{25}$$

$$(B - C)\,\xi qr + (C - A)\,\eta rp + (A - B)\,\zeta pq = 0; \tag{26}$$

e da qui si vede chiaramente che, per i giroscopi asimmetrici, cioè per $A \neq B \neq C$, la condizione necessaria e sufficiente perchè il cono (26) contenga come elemento il piano (25) è che sia nulla una delle componenti ξ, η, ζ del vettore $\mathbf{g}$, ossia che il vettore g sia parallelo ad uno dei piani principali d'inerzia.

Dalle (25) e (26) si vede anche che il cono si spezza quando sono eguali fra loro due dei momenti principali d'inerzia A, B, C, cioè quando il giroscopio è simmetrico rispetto ad uno degli assi principali d'inerzia.

Considerando il caso dei giroscopi asimmetrici e supponendo che il baricentro giaccia nel piano principale parallelo a $\mathbf{ij}$, si ha

$$\zeta = \mathrm{g} \times \mathrm{k} = 0\,; \tag{27}$$

e allora, poichè è in generale $r = \Omega \times \mathrm{k} \neq 0$, dalle (25) e (26) si ha

$$\mathrm{A}\xi . p + \mathrm{B}\eta . q = \mathrm{S}_0 \tag{28}$$

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\eta . p + (\mathrm{B} - \mathrm{C})\,\xi . q = 0\,. \tag{29}$$

Ora, perchè queste due equazioni non siano fra loro indipendenti, è necessario e basta che il determinante dei coefficienti di p e di q sia nullo, che cioè si abbia

$$\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{C})\,\xi^2 - \mathrm{B}(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\eta^2 = 0\,. \tag{30}$$

Poichè le condizioni (25), (28) e (30) caratterizzano per $\mathrm{S}_0 = 0$ il noto caso di Hess, si può dire che, « *per* $\mathrm{S}_0 = 0$, *il caso in esame si riduce al caso di Hess* ».

Volendo esaminare come si comportino in questo caso le equazioni (VI) di Schiff, si osserva che la (VI_a) equivale alla (29) ove si ponga $\mathrm{S}_0 = 0$; la (VI_b) porge

$$\mathrm{UT}' = \mathrm{U}'\mathrm{T} \tag{31}$$

e da qui, integrando e indicando con l la costante d'integrazione, si ha

$$\mathrm{T} = l\mathrm{U}\,. \tag{32}$$

Poichè l è un numero arbitrario, si comprende che in questo caso la (VI_b) non è conseguenza della (VI_a) e quindi non occorre più alcuna equazione suppletiva. Finalmente la (VI_c) dà, per la (32), la relazione

$$\mathrm{U}'^2 = \mathrm{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - 2\mathrm{U}(h - l\mathrm{U})^2 \tag{33}$$

e da questa si ricava

$$dt = \pm\, d\mathrm{U} / \sqrt{\mathrm{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - 2\mathrm{U}(h - l\mathrm{U})^2}$$

cioè « *il tempo t è espresso da un integrale ellittico di prima specie in U e, reciprocamente, l'invariante U è funzione ellittica del tempo* ».