# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Spazî a tre dimensioni con una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Chiamo, col Bianchi, normale uno spazio curvo $S_3$ a tre dimensioni, definito dal quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

quando colle linee delle sue tre congruenze principali si può costruire un sistema triplo di superficie ortogonali.

Io mi sono proposto lo studio del seguente problema: *Trovare tutti gli spazî normali* $S_3$ *dotati di una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte.*

Riserbandomi di sviluppare i calcoli in un'altra Memoria, nella presente Nota espongo in riassunto i risultati ai quali sono giunto.

1. Supposto che il nostro $S_3$ sia normale, è noto che il $ds^2$ corrispondente si può presentare sotto la forma normale

$$ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2\,, \tag{1}$$

assumendo come linee coordinate le linee delle congruenze principali.

Denotiamo con $\alpha_{rs}$ i simboli di Ricci relativi alla forma differenziale (1) e con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le tre curvature riemanniane principali. Per il fatto che le congruenze principali sono normali, si ha

$$\alpha_{rs} = 0 \quad (r \neq s) \quad \text{e} \quad \alpha_{ii} = H_i^2\, \omega_i\,,$$

ossia le funzioni $H_1, H_2, H_3$ di $x_1, x_2, x_3$ devono soddisfare alle sei equazioni

$$\tag{2} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2\, \partial x_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\,, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3\, \partial x_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\,, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1\, \partial x_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\,, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)+\dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}+\omega_1 H_2 H_3=0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)+\dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H_3}{\partial x_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}+\omega_2 H_3 H_1=0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)+\dfrac{1}{H_3^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_3}+\omega_3 H_1 H_2=0\,. \end{cases}$$

A queste equazioni aggiungiamo le conseguenze differenziali del Bianchi, che, nel caso presente, sono le seguenti:

$$(4)\quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}+(\omega_i-\omega_{i+1})\frac{1}{H_{i+1}}\frac{\partial H_{i+1}}{\partial x_i}+(\omega_i-\omega_{i+2})\frac{1}{H_{i+2}}\frac{\partial H_{i+2}}{\partial x_i}=0\,,$$
$$(i=1\,,2\,,3)\,.$$

Supposto ora che sia

$$\omega_1=-\omega_2=\omega\quad,\quad \omega_3=0\,,$$

si tratta di vedere se il sistema differenziale (2), (3) ammette delle soluzioni; e, nel caso affermativo, di determinare le soluzioni più generali.

Si noti, prima di procedere, che deve ritenersi $\omega$ essenzialmente diverso da zero, altrimenti si cadrebbe ovviamente nel caso euclideo. Si noti inoltre che le linee di curvatura, per le quali il $ds^2$ del nostro $S_3$ assume la forma normale (1), sono uniche e determinate, perchè le tre curvature sono essenzialmente distinte.

2. Facendo nelle (4) $\omega_1=-\omega_2=\omega$ e $\omega_3=0$, si ottiene

$$(4')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1}+2\omega\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}+\omega\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial x_1}=0\,, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2}+2\omega\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}+\omega\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial x_2}=0\,, \\ \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_3}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial x_3}\,. \end{cases}$$

L'ultima di queste equazioni ci dice che la congruenza [3], oltre ad esser normale, è anche *isotropa*. Dalle prime due poi si deduce

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\log\frac{H_2}{H_1}=0\,,$$

la quale, unita all'ultima delle (4′), sta ad esprimere che le linee delle congruenze [1] e [2] formano un reticolato isotermo.

Scegliendo dunque opportunamente i parametri delle linee [1] e [2], senza cambiare le linee stesse, si può porre il $ds^2$ sotto la forma

$$ds^2=e^{2h}(dx_1^2+dx_2^2)+W^2\,dx_3^2\,.$$

Possiamo quindi ripigliare in esame le (2) e (3), ponendovi $H_1 = H_2 = e^{2h}$ e $H_3 = W$.

Relativamente alle (4'), l'ultima è identicamente soddisfatta e le altre due dànno

$$\omega e^{2h} W = \eta(x_3), \tag{5}$$

denotando con $\eta$ una funzione della sola $x_3$, essenzialmente diversa da zero, perchè ciò implicherebbe $\omega = 0$.

Divideremo ora i $ds^2$, che soddisfanno alle nostre condizioni, in due classi:

A) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} = 0$,

B) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} \neq 0$.

3. E cominciamo dall'esaminare il caso A).

Le prime due delle (2) sono identicamente soddisfatte. La terza e le (3) dànno invece

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \eta = 0,\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \eta = 0\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Le condizioni di integrabilità di questo sistema sono identicamente soddisfatte.

I $ds^2$ della classe A) sono dunque caratterizzati dal sistema (6).

L'ultima delle (6) ci dice che $h$ è funzione armonica di $x_1$, $x_2$ ed esprime che le superficie $x_3 = \text{cost.}$ sono a curvatura gaussiana nulla e che anzi sono piani dello spazio curvo $S_3$, per essere $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} = 0$.

Dimostreremo che vi sono infiniti $ds^2$ appartenenti alla classe A), il grado di arbitrarietà essendo quello di una funzione armonica di due variabili. Ad ogni funzione armonica, o, ciò che è lo stesso, ad ogni funzione della variabile complessa $z = x_1 + ix_2$, resta così associata una soluzione del sistema (6).

Sommando a membro a membro la seconda e la terza delle (6), si deduce

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0 , \tag{7}$$

cioè la funzione W delle tre variabili $x_1 , x_2 , x_3$ è armonica rispetto a $x_1 , x_2$.

Ritenuto allora che W ed $h$ sono funzioni armoniche, è noto che, posto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} - i \dfrac{\partial W}{\partial x_2} = w , \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1} - i \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = \mathfrak{h} , \end{cases} \tag{8}$$

$w$ e $\mathfrak{h}$ risultano funzioni della variabil ecomplessa $z = x_1 + ix_2$, la $w$ dipendendo eventualmente anche da $x_3$.

La integrazione del sistema (6) si riconduce allora alla integrazione dell'unica equazione

$$w'(z\,; x_3) = \eta + w(z\,; x_3)\,\mathfrak{h}(z) ,$$

l'apice denotando derivazione rispetto all'argomento $z$.

Da questa equazione si deduce che $w$ deve essere della forma

$$w = \eta \,\{ \alpha(z) + x_3\, \beta(z) \} ,$$

$\alpha$ e $\beta$ dovendo soddisfare alle equazioni

$$\begin{cases} \alpha' = 1 + \alpha \mathfrak{h} , \\ \beta' = \beta \mathfrak{h} . \end{cases} \tag{9}$$

Scelta ad arbitrio una delle tre funzioni $\alpha , \beta , \mathfrak{h}$, le altre due restano ovviamente determinate a meno di una costante, per mezzo di quadrature evidenti. Converrà scegliere ad arbitrio $\alpha$: la prima delle (9) fornisce così la conoscenza di $\mathfrak{h}$. Posto allora

$$\mathcal{H}(z) = \int \mathfrak{h}(z)\, dz = u + iv ,$$

risulta

$$\beta = c_1\, e^{\mathcal{H}(z)} \quad ; \quad \mathfrak{h}(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

e, in virtù della seconda delle (8),

$$h = u + c_2 ,$$

$c_1$ e $c_2$ denotando delle costanti.

Restano così caratterizzate tutte le soluzioni della classe A).

4. Veniamo ora al caso B), in cui deve ritenersi $\frac{\partial h}{\partial x_3} \neq 0$. Dalle prime due delle (2) si deduce

$$\frac{1}{W}\frac{\partial h}{\partial x_3} = \zeta(x_3)\,, \tag{10}$$

con $\zeta$ funzione della sola $x_3$, essenzialmente diversa da zero.

Con riferimento alla metrica (1), ricordiamo che

$$\frac{1}{H_3\,H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\quad;\quad\frac{1}{H_3\,H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}$$

sono gli inversi dei raggi principali di curvatura delle superficie $x_3 = \text{cost.}$ lungo le linee di curvatura [1] e [2] rispettivamente. Dalle (10) scende quindi che, nel nostro caso, le superficie $x_3 = \text{cost.}$ sono sfere dello spazio curvo $S_3$, con curvatura eguale a $\zeta^2$.

La (10) può servire alla determinazione di W quando sia noto $h$.

Per determinare $h$ servono le (2) e (3), dalle quali si sia eliminato W e $\omega$ mediante le (10) e (5). Delle dette sei equazioni, due sono identicamente soddisfatte, una apparisce come conseguenza delle altre e le rimanenti sono:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} = \Phi(x_1\,,\,x_2)\,,\\
&2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} = \quad 2(\Psi + \theta)\,,\\
&2\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} = -\,2(\Psi + \theta)\,,
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

nelle quali equazioni $\theta = \int \zeta\eta\, dx_3$; $\Phi$ e $\Psi$ sono due funzioni, *a priori* arbitrarie, dei soli argomenti $x_1$ e $x_2$. Formando le condizioni di integrabilità, si trova

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\quad;\quad\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\,,$$

cioè le due funzioni $\Phi$ e $\Psi$ devono essere armoniche associate. Soddisfatta questa condizione, per teoremi generali ben noti, il sistema (11) ammette una sola soluzione, dipendente da tre costanti arbitrarie (in generale funzioni di $x_3$).

Il sistema (11) caratterizza tutti i $ds^2$ della classe B). Abbiamo quindi anche qui una infinità di $ds^2$ soddisfacenti alle condizioni poste, il grado di arbitrarietà essendo quello di una funzione armonica.

Spero di esaurire la discussione del sistema (11) nella redazione della Memoria *in extenso* del presente lavoro.