# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota II di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

Si ha, inversamente, il

TEOREMA II. — *Se la funzione $f$ è commutabile in* G, *essa possiede un integrule generalizzato* (R) *esteso al dominio* E, *ed è*

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f\,d\mathrm{P} = (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} f\,d\mathrm{P}\,.$$

Si ha invero

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f\,d\mathrm{P} = \lim_{m\varDelta = m\mathrm{G}} \left\{ (\mathrm{L})\int_{\varDelta} f\,d\mathrm{P} \right\} = \lim_{m\varDelta = m\mathrm{G}} \left\{ (\mathrm{R})\int_{\varDelta} f\,d\mathrm{P} \right\}.$$

Possiamo, dopo i teoremi I e II, enunciare il

TEOREMA III. — *Se l'insieme* F *in un dominio* E *dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *di una funzione $f$ è misurabile* (J), *condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f$ ammetta un integrale generalizzato* (R) *esteso ad* E, *è che essa sia sommabile in* $\mathrm{G} = \mathrm{E} - \mathrm{F}$. *Si avrà allora*

$$(\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = \lim_{m\varDelta = m\mathrm{G}} \int_{\varDelta} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\,.$$

3. Si consideri una particolare successione, avente per limite $\mathrm{G} - \mathrm{H}$, di dominii

$$(3) \qquad \varDelta_1\,, \varDelta_2\,, \ldots, \varDelta_n\,, \ldots$$

tutti contenuti in G e, ciascuno, contenente il precedente. Può darsi che la successione

$$(6) \qquad \int_{\varDelta_1} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\,, \ldots, \int_{\varDelta_n} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\,, \ldots$$

ammetta un limite determinato e finito, senza che la funzione $f$ possieda un integrale generalizzato (R) esteso ad E; è però evidente che, se $f$ possiede un tale integrale, poichè $\lim\limits_{n=\infty} (m\varDelta_n) = m\mathrm{G}$, esiste il limite della successione (6), ed esso è l'integrale indicato.

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

Sussiste però il teorema, talvolta utile in pratica:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f possieda un integrale generalizzato* (R) *esteso ad* E, *è che esista una particolare successione* (3) per cui

$$\int_{A_n} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} \tag{7}$$

*sia limitato rispetto ad n.*

La condizione è evidentemente necessaria. Dimostriamone la sufficienza. Se l'integrale (7) è limitato rispetto ad $n$, poichè esso non decresce al crescere di $n$, comunque si assegni un numero positivo $\varepsilon$, si potrà determinare un valore $\nu$ di $n$ tale che, qualunque sia il numero intiero e positivo $\mu$, risulti:

$$\int_{A_{\nu+\mu}} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} - \int_{A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Poichè $|f|$ è integrabile (R) in $A_\nu$, esiste un numero positivo $\delta$ tale che, per ogni dominio $A$, contenuto in $A_\nu$ e di misura non superiore a $\delta$, sia

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dico che allora (e ciò dimostra il nostro teorema), per ogni dominio $A$ contenuto in G e di misura non superiore a $\delta$, risulta

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \varepsilon. \tag{9}$$

Ed invero, esisterà sempre un valore di $\mu$ tale che $A$ sia contenuto in $A_{\nu+\mu}$. Poniamo $A' = A_\nu A$, $A'' = A - A'$; si avrà

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} = \int_{A'} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} + \int_{A''} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P},$$

$$\int_{A'} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{A''} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} \leq \int_{A_{\nu+\mu} - A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} =$$
$$= \int_{A_{\nu+\mu}} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} - \int_{A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi la (9).

4. Per la riduzione dell'integrale generalizzato (R) di $f$ esteso al dominio E, cominciamo dall'osservare che se si aggiungono a G = E — F i

punti della frontiera di F comuni a quella di G, otteniamo un dominio E′ di misura eguale a quella di G, ed è

$$(\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}'} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{L})\int_{\mathrm{E}'} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\,.$$

L'insieme dei punti singolari per l'integrabilità (R) di $f$ in E′ è un insieme [chiuso di misura (J) nulla] contenuto nella frontiera di E′. Possiamo pertanto limitarci a considerare un integrale generalizzato (R) esteso ad un dominio E, per una funzione $f$ per cui l'insieme F dei punti singolari per la sua integrabilità (R) è contenuto nella frontiera di E.

Ci limiteremo anche, per brevità, a considerare il caso dei dominii E a due dimensioni, essendo immediata l'estensione al caso di un numero qualunque di dimensioni.

Diciamo $\Delta$ un rettangolo *chiuso*, a lati paralleli agli assi coordinati, limitato dalle rette $x = a_1$, $x = a_2$; $y = b_1$, $y = b_2$, contenente nel suo interno il dominio E. Prolunghiamo la funzione $f$ all'esterno di E ed in tutto $\Delta$, dando ad $f$ il valore *zero* in ogni punto di $\Delta$ esterno ad E. È evidente che la funzione $f$ è integrabile (R) in ogni dominio $\Delta$ contenuto nell'insieme $\Delta$ — F e che l'insieme dei punti singolari in $\Delta$ per l'integrabilità (R) della $f$ è sempre l'insieme F dei punti singolari in E. Se $f$ possiede un integrale generalizzato (R) esteso ad E, possiede anche un tale integrale esteso a $\Delta$ e viceversa e si ha

$$(\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{R})\int_{\Delta} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}.$$

Possiamo dunque ulteriormente limitarci a considerare, in luogo del dominio E, un rettangolo chiuso $\Delta\,(x = a_1\,,\, x = a_2\,;\, y = b_1\,,\, y = b_2)$ per il quale l'insieme dei punti singolari in $\Delta$ per l'integrabilità (R) della funzione $f$ è un insieme chiuso F, interno a $\Delta$ e di misura (J) nulla.

Non perderemo però di vista il dominio E.

Facciamo la seguente ipotesi:

Ipotesi $\mathrm{I}_x$. — *Se si esclude un insieme* X′ *di valori di* $\xi$ *in* $(a_1\,,a_2)$ *di misura* (*lineare* J) *nulla, l'insieme dei punti singolari in* $(b_1\,,b_2)$ *per l'integrabilità* (R) *della funzione* $f(\xi\,,y)$ *è di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Se $f$ ammette un integrale generalizzato (R) esteso a $\Delta$, essa è, per il teorema III, sommabile in $\Delta$; ma allora, per il teorema di Fubini, $f(x\,,y)$ è, rispetto a $y$, sommabile in $(b_1\,,b_2)$, per ogni valore di $x$ in $(a_1\,,a_2)$ fuori di un insieme X″ di misura (lineare) nulla. Ne segue, per il teorema III, che $f(x\,,y)$, per ogni valore di $x$ in $(a_1\,,a_2)$, fuori di X′ e di X″, ammette un integrale generalizzato (R) esteso a $(b_1\,,b_2)$:

$$\varphi(x) = (\mathrm{R})\int_{b_1}^{b_2} f(x\,,y)\,dy\,.$$

La funzione $\varphi(x)$ è, di nuovo per il teorema di Fubini, comunque se ne completi la definizione in $X' + X''$, sommabile in $(a_1, a_2)$, e si ha

$$(\mathrm{R})\int_{\Delta} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{L})\int_{\Delta} f(\mathrm{P})\,d\mathrm{P} = (\mathrm{L})\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)\,dx .$$

Aggiungiamo ora l'ulteriore ipotesi:

Ipotesi $\mathrm{II}_x$. — *L'insieme dei punti singolari in* $(a_1, a_2)$ *per la integrabilità* (R) *della funzione* $\varphi(x) = (\mathrm{R})\int_{b_2}^{b_1} f(x, y)\,dy$ *è di misura (lineare J) nulla.*

Ne segue, in virtù del teorema III, che la funzione $\varphi(x)$ possiede un integrale generalizzato (R) esteso a $(a_1, a_2)$, e che

$$(\mathrm{L})\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)\,dx = (\mathrm{R})\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)\,dx .$$

Si ha dunque il

Teorema IV. — *Se l'insieme dei punti singolari nel rettangolo* $\Delta$ *per l'integrhbilità* (R) *della funzione* $f(x, y)$ *è di misura* (J) *nulla, mentre, nelle ipotesi* $\mathrm{I}_x$ *e* $\mathrm{II}_x$, *la* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* $\Delta$, *sussiste la formola di riduzione*

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dy , \tag{10}$$

*ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato* (R).

Ritornando al dominio E si ha, in particolare, il teorema:

*Designino* $a_1$ *e* $a_2$ *i limiti inferiorc e superiore della* $x$ *per i punti del dominio* E, *e supponiamo che, se si esclude un insieme di valori di* $\xi$ *in* $(a_1, a_2)$ *di misura (lineare J) nulla, la sezione* $\lambda(\xi)$ *di* E, *con la retta* $x = \xi$, *sia un insieme misurabile* (J); *allora se, nelle ipotesi* $\mathrm{I}_x$ *e* $\mathrm{II}_x$, *la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* E, *si ha:*

$$\iint_{\mathrm{E}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\lambda(x)} f(x, y)\,dy ,$$

*ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato* (R).

Indicheremo con *ipotesi* $\mathrm{I}_y$ e $\mathrm{II}_y$ le ipotesi i cui enunciati si ottengono da quelli delle ipotesi $\mathrm{I}_x$ e $\mathrm{II}_x$ scambiando l'ufficio dell'asse $x$ con quello dell'asse $y$. Si ha il seguente teorema di invertibilità dell'ordine di integrazione:

*Se l'insieme dei punti singolari nel rettangolo* $\Delta$ *per l'integrabilità* (R) *della funzione* $f(x, y)$ *è di misura* (J) *nulla, mentre, nelle ipotesi* $\mathrm{I}_x$ *e* $\mathrm{II}_x$, $\mathrm{I}_y$ *e* $\mathrm{II}_y$, *la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* $\Delta$, *si ha*

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_2}^{b_1} f(x, y)\,dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\,dx ,$$

*ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato* (R).