ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXVI.
1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Risoluzione dell'equazione di Fredholm con serie assolutamente sommabili del Borel.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriehe dei corpi elastici.* Nota di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È ben noto il teorema del Cerruti [1], secondo il quale le componenti dello spostamento di un corpo elastico omogeneo ed isotropo si possono sempre esprimere mediante tre sole funzioni armoniche.

Nel caso delle deformazioni simmetriche è naturale che tali componenti si esprimano mediante due sole funzioni armoniche: scopo della presente breve Nota è di dimostrare questo fatto, calcolando le effettive espressioni delle componenti.

Mi servo a tal uopo delle note formole del Beltrami relative alle funzioni armoniche simmetriche e loro associate.

§ 1. *Funzioni armoniche simmetriche e loro associate* [2]. — Sia V una funzione armonica, simmetrica rispetto all'asse z, quindi funzione soltanto di z e di $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Essa soddisferà all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0\,. \tag{1}$$

Si può, introducendo una funzione ausiliaria W, sostituire alla (1) il sistema di equazioni

$$\frac{\partial W}{\partial r}=r\frac{\partial V}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=-r\frac{\partial V}{\partial r}\,, \tag{2}$$

dalle quali si può ricavare la (1). Data V, la W si ottiene con quadrature; cioè

$$W=\int\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\,dr-r\frac{\partial V}{\partial r}\,dz\right).$$

(1) Vedi R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, cap. VI, § 8. Milano, Hoepli, 1904.

(2) Vedi E. Beltrami, *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*, Rend. Istituto lombardo, agosto 1878; oppure *Opere*, tomo III.

La W si dice associata alla V; e quando questa rappresenti un potenziale (nello spazio esterno alle masse), la W = cost, è l'equazione delle linee di forza. Si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}\right)=0\,, \tag{3}$$

e di qui, oppure direttamente dalle (2),

$$\Delta^2 W = 2\frac{\partial V}{\partial z}\,. \tag{4}$$

Nella interpretazione precedente per V si ha, nello spazio esterno alle masse,

$$\Delta^4 W = 0\,. \tag{5}$$

§ 2. *Le equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo elastico. Deformazioni simmetriche.* — Si abbia un corpo, non soggetto a forze di massa, deformato simmetricamente rispetto all'asse z: le componenti u, v, w dello spostamento soddisfanno allora a quattro equazioni indefinite che si possono scrivere in due modi diversi: esse sono [1]

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\omega^2\Delta^2 u=\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial x}+\omega^2\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right)=0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\omega^2\Delta^2 w=\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial z}+\omega^2\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial x}\right)=0\,,\\
&\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\,,
\end{aligned}\right.$$

dove $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ sono le doppie componenti della rotazione di ogni particella. Si deduce dalle (6), come è ben noto,

$$\Delta^2\theta = 0\,; \tag{7}$$

quindi, supposta nota θ (che sarà funzione simmetrica), e detta Θ la sua associata, la terza delle (6) dà immediatamente, per la (4),

$$w = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\Theta + V\,, \tag{8}$$

con V funzione armonica simmetrica.

Per calcolare u, v osserviamo che, per la simmetria, dovrà essere

$$u = xf(r\,,z)\ \,,\ \ v = yf(r\,,z)\,, \tag{9}$$

[1] Vedi Marcolongo, loc. cit., cap. VI, § 1.

e quindi

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} - y\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{y}{r}\mathfrak{T} \\ \mathfrak{T}_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} = -\dfrac{x}{r}\mathfrak{T} \\ \mathfrak{T}_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

essendo

$$(11)\qquad \mathfrak{T} = \frac{\partial w}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se sostituiamo le espressioni (10) nelle (6) della seconda forma, troviamo (siccome le prime due dànno, come è evidente, la stessa relazione)

$$(6')\qquad \begin{aligned} &\Omega^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} - \omega^2 \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} = 0\,, \\ &\Omega^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \omega^2 \frac{1}{r}\frac{\partial (r\mathfrak{T})}{\partial r} = 0\,. \end{aligned}$$

Queste, scritte sotto la forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\omega^2}{\Omega^2} r\mathfrak{T}\right) = r\frac{\partial \theta}{\partial z}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\omega^2}{\Omega^2} r\mathfrak{T}\right) = -r\frac{\partial \theta}{\partial r}\,,$$

dànno, osservando le (2) [1],

$$(12)\qquad \frac{\omega^2}{\Omega^2} r\mathfrak{T} = -\Theta\,,$$

cosicchè, essendo nota $\mathfrak{T}$, si può ora ricavare f risolvendo l'equazione differenziale immediatamente integrabile (11). Per eseguire in modo più elegante tale integrazione, occorre vedere col Beltrami come si costruisca, partendo dalla funzione simmetrica armonica V, una doppia serie di funzioni armoniche e relative associate.

§ 3. *Serie di funzioni armoniche simmetriche e relative associate* [2]. Il Beltrami osserva che le (2) possono essere interpretate separatamente come condizioni di integrabilità; e come tali possono essere usate per definire due nuove funzioni V_1, W_1, che hanno ancora il carattere di funzione

(1) Vedi Cerruti, *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Memorie Acc. Lincei, XIII, 1882.

(2) Vedi E. Beltrami, loc. cit.

armonica e relativa associata. La prima di esse dà

$$(13)\qquad V\,dz - \frac{W}{r}\,dr = dV_1\,,$$

e la seconda

$$(13')\qquad W\,dz + Vr\,dr = dW_1\,.$$

Si ha così

$$(14)\qquad V = \frac{\partial V_1}{\partial z}\quad,\quad W = -r\,\frac{\partial V_1}{\partial r}$$

$$(14')\qquad V = \frac{1}{r}\,\frac{\partial W_1}{\partial r}\quad,\quad W = \frac{\partial W_1}{\partial z}\,,$$

quindi

$$(15)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial r} = r\,\frac{\partial V_1}{\partial z}\quad,\quad \frac{\partial W_1}{\partial z} = -r\,\frac{\partial V_1}{\partial r}\,;$$

si deduce di qui, come anche dalle (2), che V_1 è armonica e W_1 ne è la funzione associata. La serie si può continuare, deducendosi dalle V_1, W_1 altre due funzioni V_2, W_2; e così di seguito. Pel nostro scopo basta limitarci alle V_2, W_2 che si deducono immediatamente dalle relazioni precedenti. Si osserverà che, data V, si deducono con successive integrazioni di differenziali esatti tutte le altre funzioni W, V_1, W_1, ecc.; mentre, dati V_2 o W_2, si ritorna indietro nella serie con sole derivazioni.

§ 4. *Applicazione alle deformazioni simmetriche.* — Per ottenere il tipo generale di deformazione simmetrica, ci rimane da trovare la f. Essa è data dalla equazione differenziale (11) dove $\mathfrak{S}$ è nota per la (12) (avendo supposto data θ e quindi Θ). Avremo così, tenendo conto della (8),

$$(16)\qquad -\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,\frac{1}{r}\,\Theta = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} - r\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Usando dei risultati ottenuti nei §§ 1 e 3 potremo scrivere

$$\Theta = \frac{\partial\Theta_1}{\partial z}\;,\;\frac{\partial\Theta}{\partial r} = r\,\frac{\partial\theta}{\partial z}\;,\;\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial W}{\partial z}\,;$$

e quindi

$$r\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Theta_1}{\partial z} - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,r\,\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial W}{\partial z}\,.$$

Di qui

$$(16')\qquad f = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\,\frac{1}{r^2}\,\Theta_1 - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,\theta - \frac{1}{r^2}\,.\,W\,. + \varphi(r)\,,$$

dove $\varphi(r)$ sarà da determinarsi in modo che le

$$u = xf\;,\;v = yf\;,\;w = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,\Theta + V$$

diano

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta\,,$$

ossia che

(17) $$2f+r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta\,.$$

Eseguendo i calcoli si trova che, affinchè sia soddisfatta la (17), deve essere

$$2\varphi(r)+r\varphi'(r)=0\,,$$

ossia

(18) $$\varphi(r)=Cr^{-2}\,,$$

con C costante. Questo termine porta nelle u, v i contributi

$$Cxr^{-2}\quad,\quad Cyr^{-2}\,,$$

che diventano infiniti per $x=y=0$. Quindi, se il sistema ha punti sull'asse z, deve essere $C=0$. Le (8) (9) (16′) [in quest' ultima ponendo $\varphi(v)=0$] risolvono il nostro problema mediante le due funzioni armoniche arbitrarie θ, V, tutte le altre deducendosi da queste con quadrature. Si osservi però che, mediante tali operazioni, vengono introdotte costanti arbitrarie. Converrà quindi introdurre altre espressioni per le quali questo inconveniente non si verifichi e nelle quali appaiano esplicitamente le due funzioni armoniche arbitrarie. A tal uopo servono le formole del § 3. Si osservi infatti che, con evidente significato dei simboli, si ha

(19) $$\theta=\frac{\partial\theta_1}{\partial z}=\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}\quad,\quad\Theta=-r\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=-r\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r\,\partial z}\quad,\quad\Theta_1=-r\frac{\partial\theta_2}{\partial r}\,,$$

(20) $$V=\frac{\partial V_1}{\partial z}\quad,\quad W=-r\frac{\partial V_1}{\partial r}\,.$$

Si vede quindi che tutto si può osprimere mediante le due funzioni armoniche simmetriche θ_2, V_1 che chiameremo rispettivamente Φ, Ψ.

Quindi, concludendo: « Il tipo generale di deformazione simmetrica si ottiene dalle formole

(21) $$\left\{\begin{aligned}&u=xf(r,z)\;,\;v=yf(r,z)\;,\;w=-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,r\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\\&f=-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\end{aligned}\right.$$

dove

$$\Delta^2\Phi(r,z)=0\quad,\quad\Delta^2\Psi(r,z)=0$$

nei punti occupati dal corpo che si deforma.