ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota IV del Corrisp. QUIRINO MAJORANA.

Secondo metodo di calcolo. — Il metodo che ora esporrò è notevolmente più laborioso del precedente, ma consente di ottenere risultati più precisi. Una grandezza *sui generis* può essere definita e chiamata *flusso di azione gravitazionale* o soltanto *flusso gravitazionale* o *d'attrazione*. Essa risponde, come si è visto, forse necessariamente, al concetto della emissione di energia da parte della materia, ma per ora, non occorre pensare a tale necessità. Se si ha una particella materiale isolata dm, tanto piccola da poter ritenere che l'assorbimento gravitazionale nel suo interno sia nullo, possiamo supporre, secondo le fatte ipotesi, che essa emetta continuamente un certo flusso complessivo di azione, proporzionale a dm, cioè kdm, uniformemente irradiato in tutte le direzioni. Dal fatto che questo flusso colpisce altra materia, scaturirebbe la formazione della forza di gravitazione. Se la particella dm trovasi nel vuoto, un angolo solido che sottenda alla distanza 1, la superficie elementare $d\sigma$, avente il vertice in dm, sarebbe traversato dal flusso:

$$\varphi = k \frac{dm\, d\sigma}{4\pi}. \tag{8}$$

Supponiamo ora che il mezzo traversato dal flusso abbia una densità diversa da zero; si verificherà allora e sempre secondo le fatte ipotesi, il fenomeno dell'assorbimento. Di questo, si può così concretare la natura: la fig. 2 indica l'angolo solido predetto; considero uno strato di spessore dx,

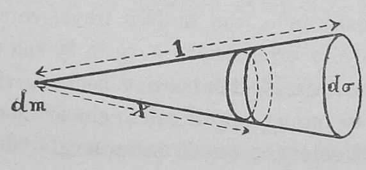

FIG. 2.

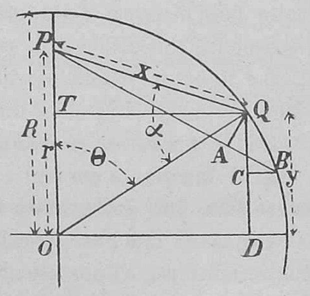

FIG. 3.

normale all'asse del cono così determinato, distante da dm per x. Il flusso, che nel caso di densità del mezzo nullo era costante, è ora variabile da sezione a sezione, e, nello strato dx, subisce una variazione negativa, in conseguenza dell'assorbimento. Si può come in altri fenomeni fisici, supporre che tale assorbimento sia *proporzionale allo spessore* dx *dello strato, alla densità del mezzo assorbente* ϑ_v *ed al valore totale del flusso nel punto* x. Si ha dunque:

$$d\varphi = -h\varphi\,\vartheta_v\,dx\,,$$

dove h è una costante di proporzionalità. Essa rappresenta il *fattore di smorzamento gravitazionale, per unità di densità e di lunghezza.* Separando le variabili nella precedente equazione differenziale, si ha

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -h\,\vartheta_v\,dx$$

che integrata dà:

$$\log\varphi = -h\,\vartheta_v\,x + \mathrm{A}\,,\quad \text{od anche}\quad \varphi = \mathrm{B}\,e^{-h\vartheta_v x}\,,$$

essendo A e B delle costanti, la cui relazione è evidente.

Ora, per $x = 0$, deve essere verificata la (8), e quindi, dicendo $h\vartheta_v = \mathrm{H}$,

$$\mathrm{B} = \frac{k\,dm\,d\sigma}{4\pi}\,,\quad \text{per cui}\quad \varphi = \frac{k\,dm\,d\sigma}{4\pi}\,e^{-\mathrm{H}x}\,. \tag{9}$$

Ciò posto, riprendiamo in esame il caso della sfera piena, di raggio R e di densità ϑ_v. Sia O il centro di tale sfera (fig. 3); di essa si consideri un punto interno P, nel quale sia concentrata la massa dm. Conduco il raggio PO della sfera, passante per P, ed un angolo infinitesimo QPB col vertice in P; conduco QA perpendicolare a PQ. Dico $\mathrm{OP} = r$, $\mathrm{PQ} = x$, $\mathrm{QD} = y$. Facciamo ruotare il triangolo QPA, intorno all'asse PO; il segmento AQ descriverà l'area $2\pi\,.\,\mathrm{TQ}\,.\,\mathrm{QA}$. Possiamo sostituire nella (9), al posto di $d\sigma$, questa superficie, riportata all'unità di distanza da P, e cioè divisa per x^2. Si ha

$$\varphi = \frac{k\,dm\,.\,\mathrm{TQ}\,.\,\mathrm{QA}}{2x^2}\,e^{-\mathrm{H}x}\,.$$

Conducasi QD parallela ad OP; projetto B, normalmente a QD, in C; sarà $\mathrm{QC} = dy$. Dicasi $\mathrm{PQO} = \alpha$, $\mathrm{POQ} = \theta$. Si vede dalla figura che $dy = \mathrm{QB}\,\mathrm{sen}\,\theta$; $\mathrm{QA} = \mathrm{QB}\cos\alpha$; per cui:

$$\mathrm{QA} = \frac{dy}{\mathrm{sen}\,\theta}\cos\alpha\,.$$

Inoltre,

$$\mathrm{TQ} = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\ ;\ x = \sqrt{\mathrm{R}^2 + r^2 - 2ry}\,;$$

differenziando quest'ultima espressione:

$$dy = -\frac{x\,dx}{r}\,;$$

dal triangolo OPQ si ha

$$r^2 = x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha ,$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + R^2 - r^2}{2xR} ;$$

e quindi

$$\varphi = -\frac{k\,dm}{4r}\left(1 + \frac{R^2 - r^2}{x^2}\right) e^{-Hx}\,dx .$$

Chiamando dF il flusso di azione che emette la particella dm in totale e che riesce ad uscir fuori dalla sfera, esso sarà dato dall'integrale di questa espressione, esteso tra i limiti $R + r$ ed $R - r$. Si ha quindi

$$dF = -\frac{k\,dm}{4r}\int_{R+r}^{R-r}\left(1 + \frac{R^2 - r^2}{x^2}\right) e^{-Hx}\,dx .$$

Ed eseguendo l'integrazione:

$$dF = \frac{k\,dm}{4r}\left[\frac{e^{-Hx}}{H} + (R^2 - r^2)\frac{e^{-Hx}}{x} + H(R^2 - r^2)\int \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\right]_{R+r}^{R-r} .$$

Estendendo ai limiti ove è possibile:

$$(10) \quad dF = \frac{k\,dm}{4r}\left[e^{-H(R-r)}\left(\frac{1}{H} + R + r\right)\right.$$

$$\left. - e^{-H(R+r)}\left(\frac{1}{H} + R - r\right) - H(R^2 - r^2)\int_{R-r}^{R+r}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\right] .$$

L'integrale rimasto, di cui sono stati scambiati i limiti di integrazione e mutato il segno, è trascendente e non può ottenersi che sviluppandolo in serie. Il calcolo si complica così, grandemente, ed io non lo riporto, quantunque, dopo averlo completato, me ne sia servito per le mie esperienze. Si può però evitare tale sviluppo mediante un elegante artifizio di calcolo, come mi ha suggerito gentilmente, il collega prof. Fubini.

Chiamo intanto dm, non la sola massa contenuta nel punto P (fig. 3), ma quella di uno strato sferico di raggio r e di spessore dr, giacchè gli elementi di questo strato sono tutti nelle stesse condizioni della massa in P. Per cui diremo

$$dm = 4\pi r^2\, \vartheta_v\, dr ,$$

e si avrà

$$dF = k\pi\, \vartheta_v r\, dr \;[\ldots.\ \text{come nella (10)} \ldots.] .$$

Per ottenere il valore del flusso totate emergente da tutti i punti della sfera, occorre integrare questa espressione da O ad R; e si ha

$$F = k\pi\,\vartheta_v \int_0^R r\,dr\ [\ldots.\ \text{come nella (10)} \ldots.];$$

e quindi

$$(11)\qquad F = k\pi\,\vartheta_v \Big[\int_0^R r\left(\frac{1}{H}+R+r\right)e^{-H(R-r)}\,dr$$

$$-\int_0^R r\left(\frac{1}{H}+R-r\right)e^{-H(R+r)}\,dr - H\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr\int_{R-r}^{R+r}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\Big].$$

I primi due integrali di questa espressione si eseguono facilmente; si può infatti scrivere:

$$\int_0^R r\left(\frac{1}{H}+R+r\right)e^{-H(R-r)}\,dr - \int_0^R r\left(\frac{1}{H}+R-r\right)e^{-H(R+r)}\,dr =$$

$$=\left(\frac{1}{H}+R\right)\Big[\int_0^R r\,e^{-H(R-r)}\,dr - \int_0^R r\,e^{-H(R+r)}\,dr\Big]+$$

$$+\int_0^R r^2\,e^{-H(R-r)}\,dr + \int_0^R r^2\,e^{-H(R+r)}\,dr.$$

Integrando, estendendo ai limiti e riducendo, si ha:

$$(12)\qquad = \frac{2R^2}{H} - \frac{2R}{H^2} + \frac{1}{H^3} - \frac{e^{-2HR}}{H^3}.$$

Rimane da calcolare il termine della (11) costituito da due fattori integrali. Si ha, a parte il fattore $-H$:

$$\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr\int_{R-r}^{R+r}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx =$$

$$=\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr\int_R^{R+r}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx + \int_0^R r(R^2-r^2)\,dr\int_{R-r}^{R}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx.$$

Invertiamo ora l'ordine di integrazione in ciascuno di questi termini, integrando cioè prima rispetto ad r e poi rispetto ad x. Si dovranno cambiare però i limiti di integrazione, e si ha

$$=\int_R^{2R}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\int_{x-R}^{R} r(R^2-r^2)\,dr + \int_0^R\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\int_{R-x}^{R} r(R^2-r^2)\,dr;$$

ed eseguendo le integrazioni rispetto ad r, e poi rispetto ad x:

$$(13)\quad =\int_R^{2R}\frac{e^{-Hx}}{x}\left\{\frac{R^2-r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right\}_{x-R}^{R}dx + \int_0^{2R}\frac{e^{-Hx}}{x}\left\{\frac{R^2-r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right\}_{R-x}^{R}dx$$

$$=\int_0^{2R}e^{-Hx}\left(R^2x - Rx^2 + \frac{x^3}{4}\right)dx = \frac{R^2}{H^2} - \frac{2R}{H^3} + \frac{3}{2H^4} - e^{-2HR}\left(\frac{R}{H^3}+\frac{3}{2H^4}\right).$$

Ritornando alla espressione (11), si avrà sostituendovi le quantità (12) e (13),

$$F = k\pi\,\vartheta_v \left\{ \frac{2R^2}{H} - \frac{2R}{H^2} + \frac{1}{H^3} - \frac{e^{-2HR}}{H^3} - \frac{R^2}{H} + \frac{2R}{H^2} - \frac{3}{2H^3} + e^{-2HR}\left(\frac{R}{H^2} + \frac{3}{2H^3}\right) \right\}$$

Riducendo e ponendo RH $= p$, si ha finalmente:

$$(14) \qquad F = k\pi\,\vartheta_v\,R^3 \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) \right\}.$$

A questa grandezza sarebbe dunque dovuta l'azione gravitazionale all'esterno della sfera. La massa apparente di questa si ottiene sopprimendo il coefficiente k (la costante universale di attrazione) e cioè

$$(15) \qquad M_a = \pi\,\vartheta_v\,R^3 \left\{ \ldots\ldots \text{ come nella (14) } \ldots\ldots \right\}.$$

Dicendo ora

$$(16) \qquad \Psi = \frac{3}{4} \left\{ \ldots\ldots \text{ come nella (14) } \ldots\ldots \right\},$$

si ha

$$(17) \qquad M_a = \frac{4}{3}\pi\,\vartheta_v\,R^3\,\Psi = M_v\,\Psi.$$

E poichè

$$(18) \qquad M_a = \frac{4}{3}\pi\,\vartheta_a\,R^3,$$

si ha

$$(19) \qquad \vartheta_v = \frac{\vartheta_a}{\Psi} \quad ; \quad \vartheta_a = \vartheta_v\,\Psi \quad ; \quad \Psi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v}\,;$$

le quali espressioni sono analoghe, rispettivamente, alle altre già scritte per il caso della funzione Φ.

La massa vera della sfera è sempre espressa dalla (1); ed anche per il caso della funzione Ψ, si può verificare che:

$$\lim_{p=0} \Psi = 1\,,$$

cioè che la massa vera coincide con la apparente, se $p = 0$, ossia se R è piccolissimo, od h nullo.

Nella stessa figura 1, si è tracciata la curva Ψ, che, analogamente alla Φ, è stata ottenuta, riportando come ordinate i valori di quella funzione, corrispondenti ai singoli valori di p. La curva Ψ, come la Φ, parte dall'ordinata 1, e, cadendo più rapidamente di quella, diventa assintotica all'asse della p.

Analogamente a quanto si è fatto per la funzione Φ, si può anche per la Ψ costruire la seguente tabella; a tal fine si fanno varie ipotesi sulla densità vera del sole, supponendo che questa possa assumere valori compresi tra la densità apparente (1,41), e, p. e., 20. Rimangono così determinati i valori della funzione Ψ, in base alle relazioni (19); in corrispondenza, e per successive approssimazioni, si trovano i valori di p, risolvendo la (16); finalmente si trovano i valori della costante di smorzamento unitaria h, dividendo p per $R\vartheta_v$:

ϑ_v	$= 1{,}41$	2	5	10	15	20
$\Psi = \frac{\vartheta_r}{\vartheta_v}$	$= 1$	0,705	0,281	0,141	0,094	0,070
p	$= 0$	0;53	2,46	5,2	7.95	10,40
$h = \frac{p}{R\vartheta_v}$	$= 0$	$3{,}81.10^{-12}$	$7{,}08.10^{-12}$	$7{,}49.10^{-12}$	$7{,}63.10^{-12}$	$7{,}64.10^{-12}$

Anche qui, come nella tabella della funzione Φ, si vede che il fattore h cresce rapidamente per variazioni della densità vera, tra 1,41 e circa 2; per valori di quella, comunque superiori, l'ordine di grandezza di h resta fissato in 10^{-12}.

Tutte le considerazioni analitiche svolte portano dunque alla seguente conclusione: Supposta per semplicità uniforme, la densità vera del sole, se essa è alquanto superiore alla apparente (p. e. 2 invece di 1,41), oppure comunque notevolmente superiore (l'analisi dice anche *infinita*), l'ordine di grandezza del fattore di smorzamento h resta fissato fra 10^{-11} e 10^{-12}. A questo risultato sono pervenuto con la considerazione di entrambe le due funzioni Φ e Ψ; e ritengo che l'aver supposto costante la densità del sole (mentre questa è certamente, ed in guisa difficilmente precisabile, non uniforme) non possa avere indotto errore notevole.