ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Meccanica. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In alcune Note precedenti [2], alle quali mi riferisco per la parte bibliografica, mi sono occupato della teoria generale dei giroscopi asimmetrici pesanti e dei due casi singolari $U = \text{cost.}$, $S = \text{cost.}$; in questa Nota studio dettagliatamente, e sempre per via intrinseca, il caso $S = 0$, particolarmente interessante perchè permette di esaminare da un nuovo ed unico punto di vista i moti di Hess, di Staude, di Mlodzjejowski e conduce ad una esauriente discussione dei *moti pendolari* considerati anche da Klein e Sommerfeld.

Essendo questi moti del tipo di quelli di Mlodzjejowski, li dirò « *moti alla Mlodzjejowski* » e dimostrerò, come conclusione generale del presente lavoro, che « *i moti che i giroscopi pesanti, simmetrici o asimmetrici,* « *possono compiere nel caso* $S = 0$, *sono moti di Hess, o moti di Staude* « *o moti alla Mlodzjejowski* ».

Sia α l'omografia d'inerzia del sistema rotante rispetto al punto fisso O; Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione attorno ad O; $g = G - O$ il vettore del baricentro G del giroscopio; gl'invarianti di Hess sono definiti dalle relazioni [loc. cit. (a)]

$$(1) \qquad S = g \times \alpha\Omega \ , \ 2T = \Omega \times \alpha\Omega \ , \ 2U = \alpha\Omega \times \alpha\Omega \ ,$$

dove il vettore $\alpha\Omega$ rappresenta il momento, rispetto ad O, dell'impulso del sistema. La condizione $S = 0$ esprime evidentemente che « *durante il moto,* « *il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso, si mantiene normale* « *al vettore del baricentro* ».

Un giroscopio sarà detto « *planare* » quando il suo baricentro si mantiene, durante il moto, in uno dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso; se, oltre a ciò, soddisfa alla nota relazione di Hess fra i parametri di massa, sarà chiamato « *giroscopio di Hess* »; se, infine, non soddisfa ad alcuna delle dette condizioni, sarà detto « *giroscopio generale* ». Nel *giroscopio planare*, il cono degli assi permanenti di rotazione (*cono di Staude*) degenera in due piani che saranno chiamati « *piani di Staude* » e sarà

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1919.

[2] O. Lazzarino: *a*) Questi Rendiconti [1° sem. 1919, pp. 325 e 341]; *b*) id. 2° sem. 1919.

detto « *primo piano* » quello che contiene il baricentro del giroscopio. Saranno indicate con apici le derivate rispetto al tempo e s'intenderà sempre esclusa l'ipotesi $g = 0$ che corrisponde al noto caso di Euler-Poinsot.

1. Moti dei giroscopi pesanti nel caso $S = 0$. — Quando S è costantemente nullo, sussistono le due equazioni [v. loc. cit. (²) *b*)]

$$(2)\quad S = g \times \alpha\Omega = 0 \quad , \quad (3)\quad S' = g \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0$$

le quali rappresentano rispettivamente un *piano* per O e il *cono di Staude*. Può accadere che le dette equazioni siano, oppur no, tra loro indipendenti.

Nella prima ipotesi, il detto piano o tocca il cono in un sol punto (il vertice) o lo taglia secondo due generatrici o gli è tangente. Nel primo caso si ha il riposo; nel secondo, il giroscopio è *planare*; nel terzo, l'asse di rotazione, dato dalla generatrice di contatto del piano col cono, è *fisso nel corpo* e si hanno moti diversi secondo che la velocità angolare del giroscopio è costante o funzione del tempo.

Nella seconda ipotesi, il piano $S = 0$ è un elemento costitutivo del *cono di Staude*, che perciò degenera in due piani; allora il baricentro del giroscopio [v. loc. cit. (²) *b*)] si mantiene, durante il moto, sopra uno dei piani principali di inerzia relativi al punto fisso (primo piano di Staude) e sussiste fra i parametri di massa la relazione di Hess. Si può quindi concludere che « *quando le equazioni* (2) « *e* (3) *non sono fra loro indipendenti, il giroscopio compie i moti* « *di Hess* ».

2. Proprietà cinematiche del giroscopio di Hess. — A completamento di quanto fu detto nella Nota *b*), dimostro alcune notevoli proprietà del giroscopio di Hess.

Indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori unitari, rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O, e supponendo che il baricentro $G = O + g$ del giroscopio si mantenga, durante il moto, nel piano principale $O\mathbf{ij}$, dalla (2) è chiaro che il vettore $\alpha\Omega$, dovendo mantenersi normale ad ogni posizione di g, si conserva perpendicolare al piano $O\mathbf{ij}$ e quindi parallelo al vettore $\mathbf{k}$; perciò si può dire che « *nel giroscopio di* « *Hess, il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso si mantiene, du-* « *rante il moto, perpendicolare al 1° piano di Staude e quindi parallelo* « *a quell'asse principale d'inerzia che è normale al detto piano* ». Da ciò segue che « *il piano* $S = 0$, *definito dalla* (2), *coincide col 2° piano di* « *Staude* ». Le intersezioni di questi due piani sono gli assi permanenti di rotazione; e quindi si può dire che « *nel giroscopio di Hess gli assi per-* « *manenti di rotazione formano un fascio di rette col centro nel punto* « *fisso* ».

Posto $P = O + \alpha\Omega$, il punto P si muove nel piano, per O, normale alla retta Og e, poichè questa è fissa nel corpo, sarà fisso anche il piano

e si ha che « *la prima curva d'impulso giace in un piano per O, fisso* « *nel corpo e normale al vettore del baricentro* ».

Osservando, infine, che mod $g = \text{mod}\,(G - O) = \text{cost.}$, si ha pure che « *il baricentro del giroscopio descrive nel 1° piano di Staude una cir-* « *conferenza col centro nel punto fisso* ».

3. Moti giroscopici nel caso in cui il piano $S = 0$ è tangente al cono di Staude. — In questo caso l'asse di rotazione ha direzione fissa nel corpo e quindi anche nello spazio ([3]). Caratterizzando questa direzione con un vettore unitario $\mathbf{u}$, si ha

$$\Omega = \omega \mathbf{u} \tag{4}$$

dove la velocità angolare ω è, in generale, funzione del tempo. Allora, tenendo conto della (4), le equazioni di Euler-Poisson assumono la forma

$$\omega' . \alpha \mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \wedge g \quad ; \quad (6)\ \mathbf{k}_1' = 0 ,$$

dove $\mathbf{k}_1$ è un vettore unitario, fisso nello spazio, verticale e rivolto verso l'alto.

Ora, moltiplicando la (5) scalarmente per $\mathbf{k}_1$ e per g, si hanno le relazioni

$$\omega' . \mathbf{k}_1 \times \alpha \mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} \times \mathbf{k}_1 = 0 \tag{7}$$

$$\omega' . g \times \alpha \mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} \times g = 0 \tag{8}$$

dalle quali, eliminando ω', si ha $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u}_1 = 0$, dove si è posto

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} \times g . \alpha \mathbf{u} - g \times \alpha \mathbf{u} . \mathbf{u} \wedge \alpha \mathbf{u} . \tag{9}$$

Il vettore $\mathbf{u}_1$ così definito, e supposto non nullo, è *fisso nel corpo*.

D'altra parte, moltiplicando la (6) scalarmente per $\mathbf{u}$ e integrando, si ha $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} = c$, dove c è una costante d'integrazione.

Allora, considerando il sistema delle due equazioni così trovate, cioè

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} = c \quad , \quad \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u}_1 = 0 , \tag{10}$$

lo studio della questione è ridotto all'esame delle (10) poichè, come si vedrà, si hanno moti giroscopici completamente diversi secondo che le (10) sono, oppur no, fra loro indipendenti.

([3]) Cfr. R. Marcolongo, *Meccanica razionale* [2ª ediz. Hoepli, vol. I, pag. 180; vol. II, pag. 280].

4. Caso in cui le (10) sono indipendenti fra loro. — Poichè i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1$ (supposti non nulli) sono *fissi nel corpo*, è chiaro che, per l'indipendenza delle (10), anche $\mathbf{k}_1$ sarà fisso nel corpo. Allora, scrivendo la (6) sotto una nota forma [loc. cit. (²) *a*)]

$$\mathbf{k}_1' = (\mathbf{k}_1') + \omega . \mathbf{u} \wedge \mathbf{k}_1 = 0 \tag{6'}$$

e osservando che, essendo $\mathbf{k}_1$ fisso nel corpo, risulta $(\mathbf{k}_1') = 0$, si ottiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_1; \tag{11}$$

cioè « *l'asse di rotazione del giroscopio risulta verticale* ». Allora la (7) porge

$$\omega' . \mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} = 0 \tag{7'}$$

e da qui, poichè per $\omega \neq 0$ è $\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} \neq 0$, risulta $\omega = \text{cost.}$; perciò si conclude che « *quando le* (10) *sono fra loro indipendenti, il giroscopio* « *compie le rotazioni permanenti di Staude* » [Journ. für Mathem., *113*, pag. 318 (1894)].

5. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di moti giroscopici quando le (10) non sono indipendenti fra loro. — Poichè la costante c è arbitraria, la prima delle equazioni (10) non può essere un'*identità*; la seconda delle (10) può essere una *conseguenza* della prima o una *identità*. Nella prima ipotesi, se m è numero reale non nullo, si può scrivere, tenendo conto della (9),

$$m\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathrm{g} . \alpha\mathbf{u} - \mathrm{g} \times \alpha\mathbf{u} . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \tag{12}$$

e da qui, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$, si ha la relazione

$$\mathrm{g} \times \alpha\mathbf{u} . (\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u})^2 = 0 \tag{13}$$

la quale importa che deve sussistere almeno una delle due condizioni

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0 \quad , \quad \mathrm{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0 . \tag{14}$$

Ora si dimostra che, in entrambi i casi, risulta $m = 0$ e perciò si conclude che « *la seconda delle* (10), *non potendo essere conseguenza della* « *prima, è identità* ».

Supposto, infatti, $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0$, il secondo membro della (12) si annulla identicamente e quindi, poichè è $\mathbf{u} \neq 0$, risulta $m = 0$; supposto, invece, $\mathrm{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$, la (8) porge, per $\omega \neq 0$, $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathrm{g} = 0$ e quindi dalla (12) si deduce ancora $m = 0$, c. d. d.

Ora, dal fatto che la seconda delle (10) è una *identità*, segue che il vettore $\mathbf{u}_1$ è necessariamente nullo e quindi, per la (9), sussiste identica-

mente la relazione

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} \,.\, \alpha\mathbf{u} = \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \tag{15}$$

che può considerarsi come l'*equazione caratteristica dei moti possibili.*

Dopo ciò, osservando che per $\mathbf{u} \neq 0$ non può, in generale, $\alpha\mathbf{u}$ essere parallelo al vettore $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$, risulta chiaro che, per soddisfare alla (15), è necessario e basta che coesistano le due condizioni

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0 \tag{16}$$

il cui significato geometrico è già noto. Perciò si conclude che « *le equa-* « *zioni* (16) *sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di* « *moti giroscopici, nel caso in cui le equazioni* (10) *non sono fra loro* « *indipendenti* ».

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota III di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

5. È interessante considerare qualche caso particolare notevole del teorema IV.

Cominciamo dall'osservare che nel teorema IV l'insieme dei punti singolari in Δ per l'integrabilità (R) della funzione $f(x, y)$ può essere, in particolare, nullo. Si ha dunque che:

Se, nelle ipotesi I_x *e* II_x, *la funzione* $f(x, y)$ *è* (*limitata e*) *integrabile* (R) *in* Δ, *vale la* (10).

Supponiamo, d'ora in avanti, che:

La funzione $f(x, y)$ *sia continua in* Δ, *eccettuati i punti di un insieme* F *di misura* (J) *nulla. Se si esclude un insieme* X *di valori* ξ *in* (a_1, a_2) *e un insieme* Y *di valori di* η *in* (b_1, b_2), *entrambi di misura* (*lineare* J) *nulla, la sezione dell'insieme* F *con ogni retta* $x = \xi$, *o* $y = \eta$, *sia un insieme di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Osserviamo che, in queste ipotesi, i punti singolari in Δ, in (b_1, b_2) e in (a_1, a_2), per l'integrabilità (R) delle funzioni $f(x, y)$, $f(\xi, y)$, $f(x, \eta)$, sono, rispettivamente, contenuti in F, nella sezione di F colla retta $x = \xi$, e in quella colla retta $y = \eta$. Si ha perciò il teorema:

Corollario I. — *Se la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso al rettangolo* Δ *e l'insieme dei punti singolari in*

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.