ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

mente la relazione

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} \,.\, \alpha\mathbf{u} = \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \tag{15}$$

che può considerarsi come l'*equazione caratteristica dei moti possibili.*

Dopo ciò, osservando che per $\mathbf{u} \neq 0$ non può, in generale, $\alpha\mathbf{u}$ essere parallelo al vettore $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$, risulta chiaro che, per soddisfare alla (15), è necessario e basta che coesistano le due condizioni

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0 \tag{16}$$

il cui significato geometrico è già noto. Perciò si conclude che « *le equa-* « *zioni* (16) *sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di* « *moti giroscopici, nel caso in cui le equazioni* (10) *non sono fra loro* « *indipendenti* ».

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota III di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

5. È interessante considerare qualche caso particolare notevole del teorema IV.

Cominciamo dall'osservare che nel teorema IV l'insieme dei punti singolari in Δ per l'integrabilità (R) della funzione $f(x, y)$ può essere, in particolare, nullo. Si ha dunque che:

Se, nelle ipotesi I_x *e* II_x, *la funzione* $f(x, y)$ *è* (*limitata e*) *integrabile* (R) *in* Δ, *vale la* (10).

Supponiamo, d'ora in avanti, che:

La funzione $f(x, y)$ *sia continua in* Δ, *eccettuati i punti di un insieme* F *di misura* (J) *nulla. Se si esclude un insieme* X *di valori* ξ *in* (a_1, a_2) *e un insieme* Y *di valori di* η *in* (b_1, b_2), *entrambi di misura* (*lineare* J) *nulla, la sezione dell'insieme* F *con ogni retta* $x = \xi$, *o* $y = \eta$, *sia un insieme di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Osserviamo che, in queste ipotesi, i punti singolari in Δ, in (b_1, b_2) e in (a_1, a_2), per l'integrabilità (R) delle funzioni $f(x, y)$, $f(\xi, y)$, $f(x, \eta)$, sono, rispettivamente, contenuti in F, nella sezione di F colla retta $x = \xi$, e in quella colla retta $y = \eta$. Si ha perciò il teorema:

Corollario I. — *Se la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso al rettangolo* Δ *e l'insieme dei punti singolari in*

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

(a_1, a_2) *per l'integrabilità* (R) *della funzione*

$$\varphi(x) = (\mathrm{R}) \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dy$$

è di misura (*lineare* J) *nulla, sussiste la* (10).

È importante anche osservare che:

Se la funzione $f(x, y)$ *possiede un integrale generalizzato* (R) *esteso al rettangolo* Δ, *la funzione* $f(\xi, y)$ *ammette sempra un integrale generalizzato* (R) *esteso a* (b_1, b_2), *escluso al più un insieme di valori di* ξ *di misura* (*lineare*) *nulla.*

Tale osservazione è utilissima in pratica. Poichè, una volta assicurata la integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione f in Δ, quando la natura dell'insieme F dei punti di discontinuità della funzione e delle discontinuità stesse è tale da presentare un certo carattere di uniformità, si potrà ben presumere che i punti ξ di (a_1, a_2), di eccezione per l'esistenza dell'integrale generalizzato (R) della funzione $f(\xi, y)$ in (b_1, b_2), siano solo da ricercare nelle ascisse dei punti di F che presentano qualche singolarità, vuoi per la discontinuità di f, vuoi per le proprietà geometriche di F (cfr. Esempio II, al n. 6).

Supponiamo, ancora più in particolare, che l'insieme F dei punti di discontinuità della funzione $f(x, y)$ abbia i suoi punti distribuiti sopra un sistema di rette $x = \xi$, costituendo i valori di ξ un insieme in (a_1, a_2) di misura (lineare J) nulla, si ha il teorema:

Corollario II. — *Se l'insieme* F *dei punti di discontinuità in* Δ *della funzione* $f(x, y)$ *si proietta sull'asse delle* x *secondo un insieme di misura lineare* (J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *sussiste la* (10).

Ne segue:

Corollario III. — *Se l'insieme* F *dei punti di discontinuità in* Δ *della funzione* $f(x, y)$ *si proietta sull'asse delle* x *e sull'asse delle* y *secondo due insiemi entrambi di misura* (*lineare* J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *sussistono le eguaglianze*

$$\iint_\Delta f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx.$$

Analogamente, si ha nello spazio:

Se l'insieme F *dei punti di discontinuità nel parallelepipedo*

$$\Delta\,(x = a_1, x = a_2\ ;\ y = b_1, y = b_2\ ;\ z = c_1, z = c_2)$$

della funzione $f(x, y, z)$ *si proietta sopra ciascuno dei tre assi* x, y, z

secondo un insieme di misura (lineare J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *sussistono le eguaglianze*

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dy =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz = \cdots = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y, z)\, dy.$$

6. Applichiamo in qualche semplice esempio la teoria svolta.

Esempio I. — Sia E un dominio del piano, le cui sezioni rettilinee $\lambda(\xi)$, $\mu(\eta)$, con ogni retta $x = \xi$, $y = \eta$ siano sempre misurabili ( ); siano a_1, a_2 e b_1, b_2 i limiti inferiore e superiore delle x e delle y per i punti di E. Siano poi $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$, n punti di E, $g(x, y)$ una funzione continua in E, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n costanti minori dell'unità e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, n costanti positive. Si considerino le funzioni

$$f_1(x, y) = \frac{g(x, y)}{\prod_1^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\alpha_i}},$$

$$f_2(x, y) = g(x, y) \prod_1^n \left| \log \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} \right|^{\beta_i};$$

queste funzioni sono continue in tutto E, se si eccettuano i punti P_i. Si vede però subito che esse ammettono un integrale generalizzato (R) esteso a E, e ciò applicando il criterio dato al n. 3 al dominio variabile Δ, ottenuto togliendo, da E, n cerchi aventi i centri nei punti P_i ed il medesimo raggio tendente a zero.

In virtù del corollario III, *la riduzione dell'integrale esteso a* E *di queste funzioni* f_1, f_2, *si può effettuare come per una funzione continua in tutto* E; *si ha cioè*

$$\iint_{E} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\lambda(x)} f(x, y)\, dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\mu(y)} f(x, y)\, dx.$$

Osservazione. Ad un'identica conclusione si perviene, nello spazio, per le funzioni

$$f_1(x, y, z) = \frac{g(x, y, z)}{\prod_1^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < \frac{3}{2},$$

$$f_2(x, y, z) = g(x, y, z) \prod_1^n \left| \log \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right\} \right|^{\beta_i}, \quad \beta_i \geq 0.$$