# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Risoluzione dell'equazione di Fredholm con serie assolutamente sommabili del Borel.* Nota di GUSTAVO SANNIA. presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Consideriamo l'*equazione di Fredholm*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, \varphi(y)\, dy \tag{1}$$

e la sua formula risolutiva

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{H}(x, y, \lambda)\, f(y)\, dy \tag{2}$$

per un valore di $\lambda$ che non sia *caratteristico* per il *nucleo*

$$\mathrm{K}(x, y) \equiv \mathrm{K}^{(1)}(x, y) \ (^1).$$

All'espressione generale, ma complicata, del *nucleo risolvente* $\mathrm{H}(x, y, \lambda)$, data dal Fredholm, si preferisce nelle applicazioni il suo sviluppo in serie di potenze di $\lambda$

$$\mathrm{H}(x, y, \lambda) = \mathrm{K}^{(1)}(x, y) + \lambda \mathrm{K}^{(2)}(x, y) + \lambda^2 \mathrm{K}^{(3)}(x, y) + \cdots \tag{3}$$

che, sostituito in (2), dà la soluzione $\varphi(x)$ espressa dalla serie

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \lambda \varphi_2(x) + \lambda^2 \varphi_3(x) + \cdots \tag{4}$$

ove

$$\varphi_1(x) = f(x)\ ,\ \varphi_n(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}^{(n-1)}(x, y)\, f(y)\, dy \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Però le formole (3) e (4) sono applicabili solo nei punti $\lambda$ del piano complesso che sono interni al cerchio C di centro $\mathrm{O}(\lambda = 0)$ e di raggio uguale al minimo fra i moduli dei valori caratteristici.

(1) Che supporremo funzione limitata e *generalmente* continua nel quadrato R limitato dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = a$, $y = b$ (ossia tranne forse in punti distribuiti sopra un numero finito di linee, ciascuna delle quali sia tagliata in un numero finito di punti da ogni retta parallela ad un asse). Si sa che allora i *nuclei iterati* $\mathrm{K}^{(2)}(x, y)$, $\mathrm{K}^{(3)}(x, y)$, ... sono funzioni continue in R e che ivi è

$$|\, \mathrm{K}^{(n)}(x, y)\, | < \mathrm{M}^n (b - a)^{n-1}, \quad \text{se} \quad |\, \mathrm{K}(x, y)\, | < \mathrm{M}.$$

Supporremo inoltre che $f(x)$ sia continua in $(a, b)$.

Scopo di questa Nota è di mostrare che il loro campo di applicabilità si può estendere interpretandole col *metodo di sommazione esponenziale* del Borel.

2. Ad ogni semiretta $s$ uscente da O si conduca la perpendicolare $p$ da quello fra i punti (valori) caratteristici giacenti su $s$ (se ve ne sono), che è più vicino ad O: quei punti $\lambda$ che giacciono dalla parte di O rispetto a tutte le rette $p$ costituiscono una regione P d'un sol pezzo, finita o non, che contiene il cerchio C fin qui considerato e che può dirsi un *poligono* (in senso lato).

Risulta dalla costruzione stessa di P che il cerchio che ha per diametro il segmento che unisce il punto O ad un punto qualunque $\lambda_0$ interno a P è tutto interno a P; anzi si può descrivere un cerchio concentrico e di raggio maggiore $\frac{1}{2}|\lambda_0| + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, anch'esso interno a P, la cui circonferenza indicheremo con $\Gamma$.

Teorema. — *In ogni punto fissato $\lambda_0$ interno al poligono* P:

1°) *la serie* (3) *è assolutamente ed uniformemente sommabile quando* $(x, y)$ *varia nel quadrato* R *ed ha per somma* $H(x, y, \lambda_0)$, *ossia le serie*

$$u^{(r)}(\alpha, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} K^{(n+r+1)}(x, y) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots) \tag{5}$$

*sono convergenti uniformemente in* R *per ogni fissato* $\alpha \geq 0$, *gli integrali*

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x, y)\, d\alpha \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

*sono convergenti assolutamente ed uniformemente in* R *ed il primo vale* $H(x, y, \lambda_0)$ [1];

2°) *la serie* (4) *è assolutamente ed uniformemente sommabile nell'intervallo* $(a, b)$ *ed ha per somma la soluzione* $\varphi(x)$ *dell'equazione di Fredholm* (1) *per* $\lambda = \lambda_0$, *ossia le serie*

$$v^{(r)}(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} \varphi_{n+r+1}(x) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

*sono convergenti uniformemente in* R *per ogni fissato* $\alpha \geq 0$, *gli integrali*

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} v^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

*sono convergenti assolutamente ed uniformemente in* R *e il primo vale* $\varphi(x)$, *soluzione di* (1) *per* $\lambda = \lambda_0$.

[1] Osserviamo per il seguito che proprietà analoghe valgono evidentemente per la serie che si deduce da (3) (con $\lambda = \lambda_0$) moltiplicandone tutti i termini per $\lambda_0 f(y)$, ossia che questa serie è assolutamente ed uniformemente sommabile in R ed ha per somma $\lambda_0 f(y) H(x, y, \lambda_0)$.

L'ampliamento del campo di validità delle (3) e (4), che ci assicura il teorema, è spesso considerevole. Così *nel caso importante che i valori caratteristici siano tutti reali (immaginarî puri)* [1], *il nuovo campo* P *è la striscia limitata dalle rette parallele all'asse immaginario (reale) condotte dai due punti caratteristici che sono più vicini ad* O *e da bande opposte rispetto a quell'asse.*

3. Per dimostrare il teorema osserviamo che la (3), *in un punto fissato* $(x, y)$ *di* R, è una serie di potenze di $\lambda$ a coefficienti numerici, il cui raggio di convergenza non è nullo: quindi [2] ammette un *poligono di sommabilità* $P(x, y)$ in ogni punto $\lambda_0$ interno al quale (mai esterno, forse del contorno) è assolutamente sommabile [3] e ha per somma il valore per $\lambda = \lambda_0$ della funzione analitica che ha per elemento la (3), ossia $H(x, y, \lambda_0)$. Per costruirlo, si conduce la perpendicolare $p$ ad ogni semiretta $s$ uscente da O, da quello fra i punti singolari giacenti su $s$ della funzione analitica $H(x, y, \lambda)$ definita dalla (3) che è il più vicino ad O: $P(x, y)$ è allora costituito dai punti $\lambda$ che giacciono dalla parte di O rispetto a tutte le rette $p$.

Variando il punto $(x, y)$ di R, varia anche il poligono $P(x, y)$ in generale; dunque, solo per ogni punto $\lambda_0$ *interno alla regione comune a tutti i poligoni* $P(x, y)$ si può asserire che la serie (3) sarà sommabile assolutamente con somma $H(x, y, \lambda_0)$ *qualunque sia* $(x, y)$ *in* R. Ora questa regione è appunto il poligono P dianzi definito: ciò risulta dalla costruzione stessa dei poligoni P e $P(x, y)$ e dal fatto (noto) che ogni valore caratteristico di $K(x, y)$ è punto singolare della funzione $H(x, y, \lambda)$ di $\lambda$ per almeno un punto $(x, y)$ di R, e viceversa.

Per completare la dimostrazione della prima parte del teorema, resta da dimostrare che la convergenza delle (5) per ogni fissato $\alpha \geq 0$ e degli integrali (6) è uniforme in R.

Per una (5), ciò segue subito dal fatto che i moduli dei suoi termini sono [4] minori dei termini (costanti) corrispondenti della serie convergente

$$\lambda_0^r M^{r+1}(b-a)^r e^{\lambda_0 M(b-a)\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} M^{n+r+1}(b-a)^{n+r} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Passando ad un integrale (6), prendiamo a considerare la circonferenza $\Gamma$ introdotta al n. 2. Nei punti $\lambda$ di $\Gamma$ e del suo interno $H(x, y, \lambda)$ è funzione olomorfa di $\lambda$, qualunque sia $(x, y)$ in R; quindi i coefficienti del suo sviluppo (3) in serie di Mac-Laurin sono esprimibili, per ogni punto fissato

[1] Come accade per es. se $K(x, y)$ è simmetrico (gobbo-simmetrico).

[2] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, chap. IV.

[3] Ciò vuol dire che nel punto fissato $(x, y)$ di R le serie (5) sono convergenti assolutamente e gli integrali (6) sono convergenti assolutamente (per definizione di Borel).

[4] Per le formole in fine di [1].

$(x, y)$ di R, con la formola di Cauchy

$$(9) \qquad K^{(n)}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^n} d\lambda ;$$

sicchè la (5) può scriversi

$$(10) \qquad u^{(r)}(\alpha, x, y) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} \frac{\alpha^n}{n!} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{n+r+1}} d\lambda .$$

Quando $\lambda$ varia su $\Gamma$ (ove non si annulla), la serie di potenze di $\lambda$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0^{n+r}}{\lambda^n} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} \lambda_0^r$$

è convergente uniformemente; quindi, variando $(x, y)$ in R e $\lambda$ su $\Gamma$, è pure convergente uniformemente la serie

$$(11) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{n+r+1}} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\lambda_0^n}{\lambda^{r+1}} H(x, y, \lambda) e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} ,$$

perchè si ottiene dalla precedente moltiplicandone tutti i termini per la funzione $H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1}$ che è limitata per $(x, y)$ su R e $\lambda$ su $\Gamma$, ossia è tale che esiste una costante $L > 0$ per cui risulti

$$(12) \qquad |H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1}| < L ,$$

qualunque sia $(x, y)$ in R e $\lambda$ su $\Gamma$ [1]. Dunque la (11) è integrabile termine a termine rispetto a $\lambda$ lungo $\Gamma$, e perciò la (10) può scriversi

$$u^{(r)}(\alpha, x, y) = \frac{\lambda_0^r}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{r+1}} e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} d\lambda .$$

Se ne deduce, per la (12), che, qualunque sia $(x, y)$ in R, è

$$|e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x, y)| < \frac{L|\lambda_0^r|}{2\pi} \int_\Gamma \left| e^{-\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\alpha} \right| |d\lambda| ;$$

[1] Si ricordi infatti che $H(x, y, \lambda)$ è esprimibile (Fredholm) come quoziente di due trascendenti intere $D(x, y, \lambda)$ e $D(\lambda)$, sicchè $H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1} = D(x, y, \lambda) : [D(\lambda)\lambda^{r+1}]$. La seconda, come $\lambda^{r+1}$, non si annulla su $\Gamma$; quindi esiste una costante $l > 0$ tale che risulti $|D(\lambda)\lambda^{r+1}| > l$ lungo $\Gamma$. Poi lo sviluppo della prima in serie di potenze di $\lambda$ ha (come è noto) i moduli dei termini minori dei termini della serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ M^{n+1}(b-a)^n (n+1)^{\frac{n+1}{2}} |\lambda| : (n+1)! \right\}$$

indipendente da $(x, y)$; sicchè se N è un numero maggiore della somma di questa serie su $\Gamma$, sarà *a fortiori* $|D(x, y, \lambda)| < N$, qualunque sia $(x, y)$ in R. Da tutto ciò segue la (12) per $L = N : l$.

poi, ricordando (n. 2) che $\frac{1}{2}|\lambda_0|+\varepsilon$ è il raggio di $\Gamma$ e chiamando $h$ una costante positiva minore della parte reale di $1-\frac{\lambda_0}{\lambda}$ lungo $\Gamma$, sicchè il modulo di $e^{-\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\alpha}$ risulti minore di $e^{-\alpha h}$ (1), si ha

$$|e^{-\alpha}u^{(r)}(\alpha, x, y)| < \frac{L|\lambda_0^r|\, e^{-h\alpha}}{2\pi}\int_\Gamma |d\lambda| = L\,|\lambda_0|^r \left\{\tfrac{1}{2}|\lambda_0|+\varepsilon\right\} e^{-h\alpha}.$$

Ora, poichè l'integrale di $e^{-h\alpha}$ (e quindi del terzo membro) rispetto ad $\alpha$ tra i limiti 0 e $+\infty$ esiste *e non dipende da* $(x, y)$, esisterà *a fortiori* l'analogo integrale del primo membro, ossia l'integrale (6) convergerà assolutamente (come già sapevamo), ed uniformemente quando $(x, y)$ varia in R. Con ciò la prima parte del teorema è dimostrata.

Ora, posto $\lambda=\lambda_0$ nella (3), moltiplichiamone tutti i termini per $\lambda_0 f(y)$: otterremo una serie di funzioni di $x, y$, continue in R a partire dalla seconda (2), che sarà sommabile assolutamente ed uniformemente ed avrà per somma $\lambda_0 H(x, y, \lambda_0) f(y)$ (3); quindi (4) sarà integrabile termine a termine rispetto a $y$ in $(a, b)$, dando origine ad una serie di funzioni di $x$ che sarà sommabile assolutamente ed uniformemente in $(a, b)$, ed avrà per somma l'analogo integrale di $\lambda_0 H(x, y, \lambda_0) f(y)$.

E con ciò anche la seconda parte del teorema è dimostrata, perchè già sappiamo (n. 1) che, così operando, si giunge alla serie (4).

(1) *h esiste.* Infatti, posto $\lambda=|\lambda|\, e^{i\theta}$, $\lambda_0=|\lambda_0|\, e^{i\theta_0}$, si vuole che sia

$$h < [\,|\lambda| - |\lambda_0| \cos(\theta-\theta_0)] : |\lambda|$$

lungo $\Gamma$. Ora $|\lambda| - |\lambda_0| \cos(\theta-\theta_0)$ misura la distanza (sempre positiva) di $\lambda_0$ dalla perpendicolare in $\lambda$ alla retta che congiunge $\lambda$ al punto $O(\lambda=0)$: quindi ha per minimo valore $\varepsilon$ (quando $\lambda$ è quell'estremo del diametro di $\Gamma$ che passa per $\lambda_0$ che è dalla parte di $\lambda_0$). Poi $|\lambda|$ ha per massimo valore $|\lambda_0|+\varepsilon$ (nello stesso punto); dunque basta prendere $h=\varepsilon:(|\lambda_0|+\varepsilon)$.

(2) Cfr. (1).

(3) Cfr. (2).

(4) Per un teorema generale che ho dimostrato nella recente Nota (n.i 6 e 7): *Sviluppo di una funzione analitica in serie sommabili col metodo di Borel* (presentata alla R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli).