ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

di cose vien verificata accuratamente col catetometro, puntando le estremità superiori delle asticine P e P′ e quelle di altri regoletti verticali che si appoggiano su punti di controllo speciali dell'involucro V′, che non sono segnati in figura. Le lunghezze delle asticine e dei regoli sono conosciute con precisione in precedenza. Essendo l'asticina P′ foggiata a vite, si può agevolmente correggere l'errore di aggiustaggio, così constatato.

Occorre infine che il centro della sfera m sia situato esattamente nel piano mediano, fra i due livelli del mercurio. Tale condizione si verifica anch'essa col catetometro, puntando attraverso il tubo di vetro D, il cilindretto Z, la cui distanza dalla sfera m è stata determinata prima del montaggio dell'apparecchio.

Meccanica. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo.* Nota II di Orazio Lazzarino, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

6. I moti alla Mlodzjejowski soddisfano alle condizioni (16). — È facile vedere che per soddisfare alle (16), e per conseguenza alla (15), basta supporre

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0 \quad , \quad \omega' \neq 0 \, ; \tag{17}$$

infatti, per la prima delle (17), è identicamente soddisfatta la prima delle (16); inoltre dalla (8) si ha $\omega' . \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$ e quindi, per $\omega' \neq 0$, risulta $\mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$, c. d. d.

Indicando poi con n un numero reale non nullo, le (17) si possono scrivere

$$\alpha\mathbf{u} = n\mathbf{u} \quad , \quad \omega' \neq 0 \tag{17'}$$

ed esprimono che « *l'asse di rotazione del giroscopio è asse principale* « *d'inerzia rispetto al punto fisso e che la velocità angolare del giroscopio* « *è funzione del tempo* ».

Nel caso dei *giroscopi asimmetrici pesanti*, si può soddisfare alle (17′) supponendo

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \quad , \quad n = C \quad , \quad \omega' \neq 0 \tag{18}$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore unitario parallelo ad uno qualunque degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso e C è il momento d'inerzia del giroscopio rispetto al detto asse. Nelle ipotesi (18), l'equazione (5) del moto si scrive

$$\omega' . C\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{19}$$

ed esprime che « *durante il moto, l'asse di rotazione si mantiene orizzon-* « *tale, mentre il baricentro del giroscopio oscilla in un piano verticale,* « *cioè il giroscopio oscilla attorno ad un asse orizzontale come un ordi-* « *nario pendolo composto* » (4).

Se poi si tratta di un *giroscopio* ***simmetrico*** *rispetto ad un asse,* ad es. $O\mathbf{k}$, allora, indicando con A, B, C i momenti principali d'inerzia rispetto al punto fisso e supponendo $A = B$, si può soddisfare alle (17') ponendo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0 \quad , \quad n = \mathrm{A} \quad , \quad \omega' \neq 0 . \tag{20}$$

Infatti, osservando che in questo caso l'omografia d'inerzia assume la forma (5)

$$\alpha = \mathrm{A} + a \, . \, H(\mathbf{k}, \mathrm{k}) \tag{21}$$

dove a è numero reale, si deduce, tenendo conto della prima delle (20),

$$\alpha \mathbf{u} = \mathrm{A}\mathbf{u} + a \, . \, \mathbf{u} \times \mathbf{k} \, . \, \mathbf{k} = \mathrm{A}\mathbf{u}$$

e quindi sussiste il ragionamento fatto per il caso precedente e si conclude che « *nelle ipotesi* (20) *i giroscopi pesanti, simmetrici rispetto ad un* « *asse, compiono dei moti pendolari attorno ad un asse orizzontale, come* « *un ordinario pendolo fisico* ».

Bisogna però osservare che, per la condizione $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$, l'asse $O\mathbf{u}$ di oscillazione può coincidere con una qualunque delle rette che passano per O e giacciono nel piano degli assi uguali d'inerzia; perciò in questo caso si ha che « *gli assi di oscillazione dei moti pendolari formano un* « *fascio di rette che ha per centro il punto fisso e per piano quello degli* « *assi eguali d'inerzia* ». Tuttavia, poichè per ciascuno dei detti assi il giroscopio è *planare*, questi moti possono chiamarsi, come quelli precedentemente considerati per i giroscopi asimmetrici, « *moti alla Mlodzjejowski* ».

Dopo ciò, si può concludere che « *quando le equazioni* (10) *non sono* « *fra loro indipendenti, fra i moti possibili vi sono certamente i moti* « *alla Mlodzjejowski* » (6).

Resta ora da vedere se, oltre questi, siano possibili, nel caso considerato, altri moti.

(4) Se fosse $\omega' = 0$, cioè $\omega = \text{cost}$, si avrebbe, per la (19), $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, cioè: « durante il moto, il baricentro del giroscopio resterebbe sulla verticale e attorno a questa « il giroscopio ruoterebbe con moto uniforme; si ricadrebbe perciò nel caso di Staude, « già studiato ».

(5) Cfr. O. Lazzarino, questi Rendiconti, 2° sem. 1917, pag. 234.

(6) B. K. Mlodzjejowski, Arbeiter der phys. Section der Freunde der Naturkunde in Moskau, 7, pag. 46 (1894).

7. Ricerca generale di tutti i moti possibili quando le (16) non sono fra loro indipendenti. — Poichè tutti i moti possibili devono soddisfare necessariamente alle (16), la ricerca consiste sostanzialmente nel vedere a quali moti la coesistenza delle (16) possa condurre. Giova ricordare che nel caso $S =$ cost., per avere l'equivalenza fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson, è necessario associare alle prime la equazione supplementare [v. loc. cit. (2) *b*)]

$$k\mathrm{g}^2 + 2\mathrm{U} \,.\, \mathrm{g} \times \Omega + \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega \times \alpha\Omega' = 0 \tag{22}$$

dove

$$k = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 \tag{23}$$

è la costante dell'integrale delle aree [v. loc. cit. (2) *a*)]. Osservando ora che, per la (4), l'ultimo termine della (22) si annulla e ponendo, per semplicità di scrittura,

$$\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} = 2a \quad , \quad \alpha\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} = 2b \tag{24}$$

dove a e b sono numeri costanti e positivi, dalle (1) si ha

$$\mathrm{T} = a\omega^2 \quad , \quad \mathrm{U} = b\omega^2 \tag{25}$$

e la (22) assume la forma

$$k\mathrm{g}^2 + 2b \,.\, \mathrm{g} \times \mathbf{u} \,.\, \omega^3 = 0 \,,$$

dalla quale si deduce, in generale, un valore costante per ω (7).

Perchè ω possa essere funzione del tempo, come richiede la seconda delle (17), è necessario che coesistano le due condizioni

$$(26)\ \ k = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 = 0 \quad ; \quad (27)\ \ \mathrm{g} \times \mathbf{u} = 0$$

le quali esprimono che « *il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso* « *deve mantenersi orizzontale e l'asse* O**u** *di oscillazione deve restare* « *normale al vettore del baricentro* ».

D'altra parte, essendo α dilatazione, la seconda delle (16) può scriversi

$$\alpha\mathrm{g} \times \mathbf{u} = 0 \tag{28}$$

e allora, indicando con l un numero reale non nullo, dalle (27) e (28) si ha

$$\mathbf{u} = l \,.\, \mathrm{g} \wedge \alpha\mathrm{g} \tag{29}$$

e quindi

$$\alpha\mathbf{u} = l \,.\, \alpha(\mathrm{g} \wedge \alpha\mathrm{g}) = l(\mathrm{I}_1\alpha \,.\, \mathrm{g} \wedge \alpha\mathrm{g} - \mathrm{g} \wedge \alpha^2\mathrm{g}) \,. \tag{30}$$

(7) Essendo, nel caso in esame, i vettori g, $\mathbf{u}$ fissi nel corpo e costanti in grandezza, sarà $\mathrm{g} \times \mathbf{u} =$ cost.

Dopo ciò, la prima delle (16) può scriversi

$$l^2(\mathrm{g} \wedge \alpha\mathrm{g}) \times (I_1 \alpha \,.\, \mathrm{g} \wedge \alpha\mathrm{g} - \mathrm{g} \wedge \alpha^2\mathrm{g}) \wedge \mathrm{g}$$

e da qui, sviluppando e semplificando, si ottiene l'equazione

$$l^2 \mathrm{g}^2 \,.\, \mathrm{g} \times \alpha\mathrm{g} \wedge \alpha^2\mathrm{g} = 0 . \tag{31}$$

Indicando ora con ξ, η, ζ le coordinate del baricentro del giroscopio, rispetto alla terna $O(\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathbf{k})$ precedentemente considerata, e con A, B, C i momenti principali d'inerzia rispetto ad O, la (31) assume la forma

$$l^2 \mathrm{g}^2 (\mathrm{B} - \mathrm{C})(\mathrm{C} - \mathrm{A})(\mathrm{A} - \mathrm{B})\, \xi\eta\zeta = 0 \tag{31'}$$

e, poichè i numeri l^2 e g^2 non sono nulli, si conclude che la (31'), e quindi la (31), è soddisfatta quando, e solo quando, si verifica una delle seguenti condizioni:

$$\xi = 0 \;,\; \eta = 0 \;,\; \zeta = 0 \tag{32}$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{C} \;,\; \mathrm{C} = \mathrm{A} \;,\; \mathrm{A} = \mathrm{B} ; \tag{33}$$

cioè quando, e solo quando, il *giroscopio è planare o simmetrico rispetto ad un asse.*

Supponendo ad es. $\zeta = 0$ e tenendo presenti la seconda delle (16) e la (27), si vede che in detta ipotesi devono coesistere, per ogni posizione di g, le tre condizioni

$$\zeta = \mathrm{g} \times \mathbf{k} = 0 \;,\; \mathrm{g} \times \alpha\,\mathbf{u} = 0 \;,\; \mathrm{g} \times \mathbf{u} = 0 \tag{34}$$

dalle quali risulta $n\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$, $\mathbf{k} = \mathbf{u}$; si deducono perciò le (18) e si conclude che « *le ipotesi* (32) *conducono ai moti alla Mlodzjejowski* ».

Nelle ipotesi (33), supposto ad es. $A = B$, si ha, per la (21),

$$\alpha\mathbf{u} = \mathrm{A}\mathbf{u} + a \,.\, \mathbf{u} \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k}$$

e quindi la seconda delle (16) assume la forma

$$\alpha\mathbf{u} \times \mathrm{g} = \mathrm{A} \,.\, \mathbf{u} \times \mathrm{g} + a \,.\, \mathbf{u} \times \mathbf{k} \,.\, \mathrm{k} \times \mathrm{g} = 0$$

e da qui, per la (27), e osservando che è $a \neq 0$, si ottiene la relazione

$$\mathbf{u} \times \mathbf{k} \,.\, \mathbf{k} \times \mathrm{g} = 0$$

che è soddisfatta quando si verifica almeno una delle due condizioni

$$\mathrm{g} \times \mathbf{k} = 0 \;,\; \mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0 .$$

Per $\mathrm{g} \times \mathbf{k} = \zeta = 0$ si ripete il ragionamento precedente; per $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$ si osserva che questa condizione coincide con la prima delle (20) e che perciò si ha $\alpha\mathbf{u} = \mathrm{A}\mathbf{u}$, $\mathrm{A} = n$, onde si deduce, tenendo presente quanto

si è ottenuto dalle (20), che « *anche le ipotesi* (33) *conducono ai moti* « *alla Mlodzjejowski* ».

Avendo così dimostrato che « la coesistenza delle condizioni (16) e dell'ipotesi $\omega' \neq 0$ conduce necessariamente ai moti alla Mlodzjejowski », si può concludere che « *tutti i moti giroscopici possibili, per* $\omega' \neq 0$, *e* « *quando le equazioni* (10) *non sono fra loro indipendenti, sono moti* « *alla Mlodzjejowski* ».

Per $\omega' = 0$ si hanno, come si è già visto, i moti di Staude.

Nei moti alla Mlodzjejowski, il cono di Staude si spezza in due piani, uno dei quali (primo piano di Staude) contiene il baricentro del giroscopio, e l'altro (secondo piano di Staude), a differenza di quanto accade nel caso di Hess, non coincide col piano $S = 0$. Questo piano, la cui equazione può scriversi $\alpha \mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0$, taglia i detti piani secondo le rette $O.\alpha \mathbf{g}$, $O\mathbf{u}$, di cui la seconda coincide con l'asse di oscillazione del giroscopio.

8. Determinazione dell'asse di oscillazione nei moti alla Mlodzjejowski. — Per determinare l'asse $O\mathbf{u}$ di oscillazione, possono servire le equazioni

$$\alpha \mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0 \ , \ \alpha \mathbf{u} \wedge \mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0 \ , \ \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 1 \tag{35}$$

che, nel caso in esame, sono tutte indipendenti fra loro. Da esse si deduce, con procedimento noto [v. loc. cit. ([2]) *a*) pag. 328], la relazione

$$\alpha \mathbf{g} \times (\alpha \mathbf{u} \wedge \mathbf{g}) \wedge \mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} = \alpha \mathbf{g} \wedge (\alpha \mathbf{u} \wedge \mathbf{g}) \tag{36}$$

la quale permette di determinare il vettore $\mathbf{u}$, essendo, per l'indipendenza delle (35),

$$\alpha \mathbf{g} \times (\alpha \mathbf{u} \wedge \mathbf{g}) \wedge \mathbf{u} \neq 0 \,. \tag{37}$$

Tale condizione non è soddisfatta nell'ipotesi particolare

$$\alpha \mathbf{u} \wedge \mathbf{g} = 0 \tag{38}$$

la quale però *non è compatibile* con la condizione $\alpha \mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0$, trovata necessaria per l'esistenza dei moti alla Mlodzjejowski. Da ciò si deduce che « *quando il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso è parallelo al* « *vettore del baricentro, i moti alla Mlodzjejowski non sono possibili* ».

Non è però escluso che, in questo caso e per un *giroscopio generale*, possano sussistere delle *rotazioni permanenti* attorno alla retta di equazione (38), la quale appartiene al *cono di Staude*.