ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota IV di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

ESEMPIO II. — Sia E un dominio piano la cui frontiera sia costituita da una curva chiusa C semplice regolare di Jordan di equazioni parametriche $x = h(s)$, $y = k(s)$, ove s designa l'arco di C. Le funzioni $h(s)$, $k(s)$ sono supposte continue con le loro derivate prime e seconde in tutto il tratto (0 . L), L designando la lunghezza di C. Supponiamo anche che la curva C abbia l'equazione $l(x, y) = 0$, essendo $l(x, y)$ una funzione continua, con le sue derivate parziali prime e seconde, in un rettangolo Δ, a lati paralleli agli assi coordinati, contenente E, sempre positiva nei punti *interni* di E, riuscendo inoltre, su C, $l_x^2 + l_y^2 > 0$.

Sia ora $g(x, y)$ una funzione continua in tutto E, e consideriamo la funzione

$$f(x, y) = g(x, y) : [l(x, y)]^\alpha,$$

ove α è una costante minore dell'unità. Questa funzione è continua in ogni dominio *interno* ad E. Dico che *essa ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso ad* E [2].

Supponiamo che il verso degli archi crescenti su C sia quello positivo su C. Indicando con n la normale a C, vòlta verso l'interno di E, si ha: $\cos(x, n) = -k'(s)$, $\cos(y, n) = h'(s)$. La curvatura di C

$$\frac{1}{R} = |h' k'' - k' h''|,$$

è, per ipotesi, (finita e) continua in tutto (0, L). Il minimo R_0 del raggio di curvatura R di C sarà perciò diverso da zero. Portiamo su n, a partire da C e nel verso positivo di n, un segmento costante $\varrho < R_0$; si ottiene la curva C_ϱ di equazioni

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} x = h(s) - \varrho k'(s), \\ y = k(s) + \varrho h'(s), \end{cases}$$

che dico essere semplice, regolare e intieramente interna a E, non appena ϱ

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

[2] Alle stesse conclusioni si giungerebbe per la funzione

$$f(x, y) = g(x, y) \, |\log l(x, y)|^\beta,$$

ove β è una qualunque quantità positiva.

è minore di un certo termine r assegnabile. La normale interna n in un punto P di C, corrispondente al valore s dell'arco, è incontrata dalla curva C, oltre che in P, in un insieme di punti diversi da P, sia $p_1(s)$ la distanza del punto P da questo insieme. Al variare di s, $p_1(s)$ è una funzione positiva di s e, con un ragionamento di noto tipo, si dimostra che essa ha in $(0, L)$ un limite inferiore $p_1 > 0$. Consideriamo ora, con P, un punto Q variabile su C; l'asse del segmento PQ incontra il raggio n, determinando su di esso, al variare di Q, un insieme di punti dal quale P ha una distanza $p_2(s)$ diversa da zero [1]; $p_2(s)$ è una funzione di s sempre positiva avente in $(0, L)$ un limite inferiore $p_2 > 0$.

Sia ora r minore della minore delle tre quantità p_1, p_2, R_0. La curva C_ϱ risulterà intieramente interna ad E, poichè $\varrho < p_1$; risulterà semplice, poichè $\varrho < p_2$; risulterà regolare, poichè ove fosse, per un valore di s, contemporaneamente, $h'(s) - \varrho k''(s) = k'(s) + \varrho h''(s) = 0$, se ne trarrebbe $1 - \varrho(h' k'' - k' h'') = 0$ e quindi che, per quel valore di s, il segmento ϱ raggiungerebbe il raggio di curvatura di C; ciò che è assurdo, per essere $\varrho < R_0$.

Possiamo pertanto asserire che la curva C_ϱ è la frontiera di un dominio E_ϱ tutto interno ad E. Per assicurare l'integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione $f(x, y)$ in E, basterà, in virtù del criterio dato al n. 3, far vedere che l'integrale

$$\iint_{E_\varrho} |f(x, y)|\, dx\, dy = \iint_{E_\varrho} \frac{|g(x, y)|}{[l(x, y)]^\alpha}\, dx\, dy,$$

è limitato in ogni tratto (ε, r), ove ε è un infinitesimo; o, cioè, che indicando con $E_{\varrho_1 \varrho_2}$ il dominio compreso tra due curve $C_{\varrho_1}, C_{\varrho_2}, \varrho_1 < \varrho_2 < r$, si avrà

$$\lim_{\varrho_1 = 0,\, \varrho_2 = 0} \iint_{E_{\varrho_1 \varrho_2}} \frac{|g(x, y)|}{[l(x, y]^\alpha}\, dx\, dy = 0. \tag{12}$$

Per il calcolo dell'integrale di $|f|$ esteso al dominio $E_{\varrho_1 \varrho_2}$, cangiamo le variabili di integrazione x e y nelle variabili s e ϱ legate alle x e y dalle (11), ciò che, come facilmente si vede, è lecito. Si ha, in $E_{0,r}$, $\dfrac{D(x, y)}{D(s, \varrho)} = 1 - \varrho(h' k'' - k' h'') > 0$. Se designamo con K il massimo, in $E_{0,r}$, di $|g(x, y)| \{ 1 - \varrho(h' k'' - k' h'') \}$, si trova

$$\iint_{E_{\varrho_1 \varrho_2}} |f(x, y)|\, dx\, dy \leq K \int_0^L ds \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{[l(x, y)]^\alpha},$$

[1] $p_2(s)$ è il limite inferiore dei raggi dei cerchi tangenti in P alla C, e giacenti dalla parte di n, che hanno almeno un ulteriore punto, diverso da P, in comune con C. Se pertanto fosse $p_2(s) = 0$, ne seguirebbe che in P la curvatura di C sarebbe infinita.

ove

$$(13) \qquad l(x,y) = \varrho\, l_\rho(0,s) + \frac{\varrho^2}{2}\, l_{\rho\rho}(\bar\varrho, s),$$

$\bar\varrho$ designando un certo valore pasitivo, dipendente da s, minore di ϱ.

Si ha, d'altra parte, $l_\rho(0,s) = -l_x(h,k)k' + l_y(h,k)h'$; e pertanto risulterà sempre, in $(0,L)$, $l_\rho(0,s) \neq 0$, poichè, in caso diverso, avendosi identicamente $l_x(h,k)h' + l_y(h,k)k' = 0$, ne seguirebbe, contrariamente ad un'ipotesi fatta, l'esistenza di un punto di C in cui $l_x = l_y = 0$.

Sarà d'altra parte sempre $l_\rho(0,s) > 0$, poichè $l(x,y)$, nulla su C, è sempre positiva nell'interno di C. Diciamo m il minimo, in $(0,L)$, di $l_\rho(0,s)$, sarà $m > 0$; diciamo M il massimo di $\frac{1}{2}|l_{\rho\rho}(\varrho,s)|$ in $E_{0,r}$. Si dedurrà, dalla (13), $l(x,y) > \varrho m - \varrho^2 M$. Prendiamo ora ϱ_1 e ϱ_2 entrambi minori di $m:(2M)$; si avrà, in tutto $E_{\varrho_1\varrho_2}$,

$$l(x,y) > \varrho(m - \varrho M) > \varrho\, m/2.$$

Ne segue, per gli indicati valori di ϱ_1 e ϱ_2,

$$\iint_{E_{\varrho_1\varrho_2}} |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \frac{2^\alpha KL}{m^\alpha}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\frac{d\varrho}{\varrho^\alpha}, \qquad \alpha < 1,$$

ed il secondo membro di questa diseguaglianza è un infinitesimo con ϱ_1 e ϱ_2. È con ciò dimostrata la (12) e quindi l'integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione $f(x,y)$ nel dominio E.

Diciamo a_1 e a_2 il minimo ed il massimo della x su C. Supponiamo ora, in particolare, che, se si esclude un insieme X di valori di ξ in (a_1, a_2) di misura (lineare) nulla, la sezione del dominio E, con ogni retta $x = \xi$, sia un insieme $\lambda(\xi)$ misurabile (J). Si può asserire allora (cfr. l'osservazione al Corollario I del n. 5) che *la funzione $f(\xi, y)$ ammette sempre un integrale generalizzato* (R) *esteso a $\lambda(\xi)$, escluso al più un insieme di valori di ξ in (a_1, a_3) di misura (lineare) nulla.*

Per ricercare i punti in (a_1, a_2) di eccezione per l'integrabilità (R) in modo generalizzato di $f(\xi, y)$ in $\lambda(\xi)$, supponiamo, ancor più in particolare, che ogni retta $x = \xi$, per ξ *interno* ad (a_1, a_2), seghi la curva C in due soli punti $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$, $y_1(\xi) < y_2(\xi)$, le funzioni $y_1(\xi)$ e $y_2(\xi)$ essendo continue in (a_1, a_2) [1]. Supponiamo anche che esista su C soltanto un numero finito di punti nei quali la tangente a C è verticale [1]. Si potrà allora dividere l'intervallo (a_1, a_2) in un numero finito di tratti (α_i, β_i), nei punti *interni* di ciascuno dei quali è sempre $l_y[x, y_1(x)] > 0$, $l_y[x, y_2(x)] > 0$.

Dico che in ogni tratto (α'_i, β'_i), *interno* ad (α_i, β_i), l'integrale generalizzato di Riemann

$$\varphi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

[1] Le conclusioni a cui giungeremo sussistono per ipotesi molto più larghe.

ha un valore determinato e finito, ed esso è una funzione di x continua in (α'_i, β'_i).

Designino $\eta(x)$, indifferentemente, una delle due funzioni $y_1(x)$ o $y_3(x)$, m $(m > 0)$ il minimo in (α'_i, β'_i) di $|l_y(x, \eta(x))|$, M il massimo in E di $\frac{1}{2}|l_{yy}(x, y)|$. Si ha

$$l(x, y) = [y - \eta(x)]\, l_y[x, \eta(x)] + \tfrac{1}{2}[y - \eta(x)]^2\, l_{yy}[x, \bar{\eta}(x)],$$

ove $\bar{\eta}(x)$ è un valore intermedio fra y e $\eta(x)$. Ne segue che, per $|y - \eta| < \dfrac{m}{2M}$, risulta $l(x, y) > \dfrac{m}{2}|y - \eta|$. Pertanto, se y' e y'' sono due qualisivogliano valori, entrambi contenuti o nel tratto $\left(y_1, y_1 + \dfrac{m}{2M}\right)$ o nel tratto $\left(y_2 - \dfrac{m}{2M}, y_2\right)$, si ha

$$\int_{y'}^{y''} |f(x, y)|\, dy \leq \frac{2^\alpha H}{m^\alpha} \int_{y'}^{y''} \frac{dy}{|y - \eta|^\alpha},$$

ove H è il massimo di $|g|$ in E. Ciò intanto prova che $f(x, y)$, per ogni valore di x in (α'_i, β'_i) ammette un integrale generalizzato (R) esteso al tratto $[y_1(x), y_2(x)]$. Per dimostrare ora che questo integrale $\varphi(x)$ è una funzione continua di x in (α'_i, β'_i), osserviamo che, se σ designa una fissata quantità positiva per cui sia

$$\frac{2^\alpha H}{m^\alpha} \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ε essendo un numero positivo arbitrariamente assegnato, risulterà, per ogni valore di x in (α'_i, β'_i),

$$(14) \qquad \left| \int_{y_1}^{y_1 + \sigma} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon \quad , \quad \left| \int_{y_2 - \sigma}^{y_2} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon.$$

Esiste un numero positivo δ tale che, per $|\Delta x| < \delta$, si ha

$$\left| \int_{y_1(x + \Delta x) + \sigma}^{y_2(x + \Delta x) - \sigma} f(x + \Delta x, y)\, dy - \int_{y_1(x) + \sigma}^{y_2(x) - \sigma} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon,$$

per tali valori di Δx si otterrà, in virtù delle (**14**),

$$|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon,$$

e ciò prova la continuità di $\varphi(x)$ in (α'_i, β'_i). *L'insieme dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *della funzione* $\varphi(x)$ *in* (a, b) *è dunque contenuto in quello dei punti, in numero finito,* a, b, α_i, β_i. Ne segue, in forza del

Corollario I, che *la funzione* $\varphi(x)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso al tratto* (a, b), *e che si ha*

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dx .$$

Osservazione I. Con un'analisi, analoga a quella precedente, può essere trattato, con i medesimi risultati, il caso in cui la curva C semplice di Jordan sia scomponibile in un numero finito di archi, lungo ciascuno dei quali si verifichino le ipotesi precedentemente enunciate per l'intiera curva C, potendo dunque la curva presentare dei punti angolosi o delle cuspidi in numero finito. Occorrono però in tal caso ulteriori condizioni per la curva C. In ogni punto (x_0, y_0), singolare per C, si ha $l(x_0, y_0) = l_x(x_0, y_0) = l_y(x_0, y_0) = 0$, basterà supporre che sia

$$l_{xx}(x_0, y_0)\, l_{yy}(x_0, y_0) - l_{xy}^2(x_0, y_0) < 0 ,$$

e che esista un punto M, interno a C, per cui i raggi, da esso uscenti, incontrino in un solo punto la C. Le curve C_ρ dianzi considerate si sostituiranno ora con curve omotetiche della C, rispetto a M assunto come centro di omotetia.

Osservazione II. È facile anche stabilire che se in un dominio E la funzione $f(x, y)$ può mettersi sotto una delle forme

$$f_1(x, y) = g(x, y) : \prod_1^n{}_i |a_i x + b_i y + c_i|^{\alpha_i} \qquad , \alpha_i < 1 , a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0 ,$$

$$f_2(x, y) = g(x, y) \cdot \prod_1^n{}_i \Big| \log |a_i x + b_i y + c_i| \Big|^{\beta_i} , \beta_i \geq 0 , a^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0 ,$$

ove $g(x, y)$ è continua in tutto E, *la riduzione dell'integrale generalizzato* (R) *della funzione* f *esteso ad* E *si può effettuare come per quello di una funzione continua in tutto* E.

Osservazione III. Conclusioni analoghe sussistono nello spazio per la funzione

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) : [l(x, y, z)]^\alpha , \quad \alpha < 1 .$$

Osservazione IV. Gli esempî I e II, benchè particolari, illustrano bene la teoria svolta nella Note precedenti e ne confermano la notevole portata pratica.